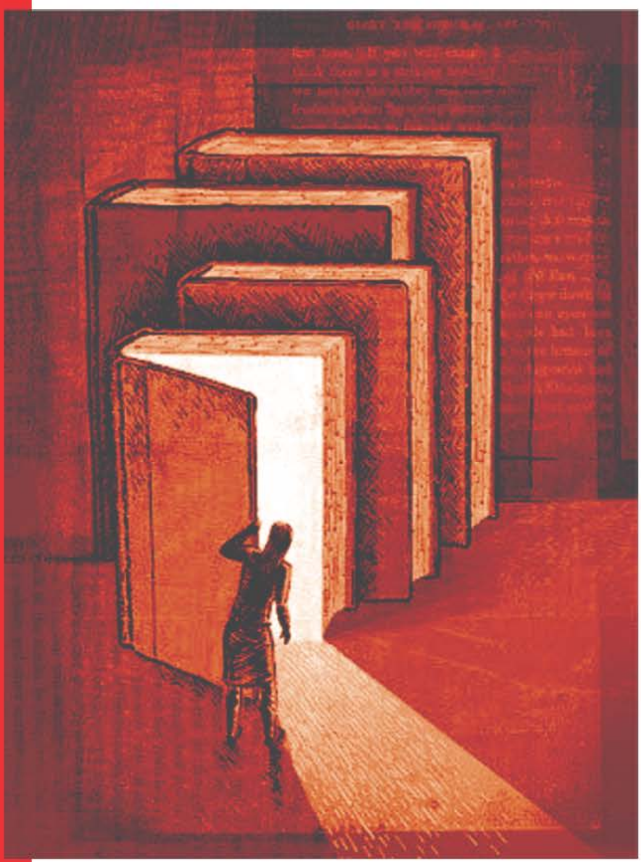
2| SLD
DMA

Dumitru Bălă, Maria-Magdalena Boureanu,
Liliana-Maria Bucur, Cristian-Paul Dăneț,
Luminița Grecu, Florian Munteanu,
George Popescu, Mihaela Racilă,
Laurențiu-Emanuel Temereancă, Cristian Vladimirescu

Teste Grilă pentru Proba Scrisă la Matematică a Examenului de Admitere la Licență la Facultatea de Automatică, Calculatoare și Electronică

Seria de Lucrări Didactice



Editura Universitaria Craiova

Teste Grilă pentru Proba Scrisă la Matematică
a Examenului de Admitere la Licenţă
la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică

Universitatea din Craiova
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematici Aplicate

Seria de Lucrări Didactice

Colectivul Editorial

Cristian Vladimirescu - coordonator

Maria–Magdalena Boureanu

Liliana–Maria Bucur

Dana Constantinescu

Aurelia Florea

Luminiţa Grecu

Florian Munteanu

Marcela Popescu

Paul Popescu

Mihaela Racilă

Dumitru Bălă, Maria–Magdalena Boureanu,
Liliana–Maria Bucur, Cristian–Paul Dăneţ,
Luminiţa Grecu, Florian Munteanu,
George Popescu, Mihaela Racilă,
Laurenţiu–Emanuel Temereancă, Cristian Vladimirescu

Teste Grilă pentru Proba Scrisă la Matematică a Examenului de Admitere la Licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică

EDITURA UNIVERSITARIA
CRAIOVA, 2024

Referenţi ştiinţifici:
Conf. univ. dr. ing. Marius Marian
Prof. univ. dr. Paul Popescu
Prof. univ. dr. ing. Dan Selişteanu
Prof. univ. dr. ing. Gheorghe–Dorin Şendrescu

Copyright © 2024 Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică

Copyright © 2024 Editura Universitaria

ISBN 978-606-14-2002-5

Seria de Lucrări Didactice ale Departamentului de Matematici Aplicate

Volumul 1: C. Vladimirescu, F. Munteanu, M.–M. Boureanu, D. Constantinescu, C.–P. Dăneţ, A. Florea, L.–E. Temereancă, G. Popescu, C. Şterbeţi, D. Bălă, 101 *Teste pentru Proba Scrisă la Matematică a Examenului de Admitere la Licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică*, Editura Universitaria, Craiova, 2018, iii+325p.

Volumul 2: D. Bălă, M.–M. Boureanu, L.–M. Bucur, C.–P. Dăneţ, L. Grecu, F. Munteanu, G. Popescu, M. Racilă, L.–E. Temereancă, C. Vladimirescu, *Teste Grilă pentru Proba Scrisă la Matematică a Examenului de Admitere la Licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică*, Editura Universitaria, Craiova, 2024, i+446p.

Cuprins

Prefaţă

Prezentul ghid se adresează celor care se pregătesc pentru proba scrisă la matematică a examenului de admitere la licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică a Universităţii din Craiova, dar şi celor care se pregătesc pentru susţinerea examenului naţional de bacalaureat la matematică, respectând programa analitică prezentată în acest volum.

Lucrarea este structurată în trei capitole şi conţine teste propuse de autori şi subiectele date în anul 2023 la admiterea la această facultate, în total 44 variante. Fiecare test propus în acest volum are 30 de probleme de tip grilă, fiecare problemă având câte 5 răspunsuri, dintre care unul singur este corect.

Primul capitol conţine enunţurile a 44 teste propuse. Acestea sunt însoţite în capitolul al doilea, de soluţii şi răspunsuri corecte. Capitolul al treilea prezintă enunţurile şi răspunsurile corecte ale subiectelor date la examenul de admitere la licenţă de la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică, din anul 2023.

Variantele propuse sunt elaborate de cadre didactice ale Departamentului de Matematici Aplicate al Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii din Craiova, astfel: variantele 1–5 sunt redactate de conf. dr. Cristian Vladimirescu, variantele 6–10 de lect. dr. Florian Munteanu, variantele 11–15 de lect. dr. Cristian–Paul Dăneţ, variantele 16–20 de conf. dr. Maria–Magdalena Boureanu, variantele 21–25 de conf. dr. Mihaela Racilă, variantele 26–30 de lect. dr. Laurenţiu–Emanuel Temereancă, 31–35 de conf. dr. Luminiţa Grecu, variantele 36–40 de lect. dr. George Popescu, variantele 41–42 de lect. dr. Liliana–Maria Bucur şi variantele 43–44 de lect. dr. Dumitru Bălă.

Lucrarea poate fi utilă atât profesorilor, cât şi elevilor, în activităţile curente de învăţare şi evaluare de la clasă.

Vă dorim succes în pregătirea examenelor !

Autorii

Programa analitică a probei scrise la matematică din Concursul de Admitere la Licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică

- **Mulţimea numerelor reale:** operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, puteri, aproximări raţionale pentru numere iraţionale sau reale, partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real, operaţii cu intervale de numere reale, radicali, logaritmi.
- **Elemente de logică matematică:** operaţii logice elementare (negaţia, conjuncţia, disjuncţia, implicaţia, echivalenţa) corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementara, intersecţia, reuniunea, incluziunea, egalitatea), raţionament prin reducere la absurd.
- **Inducţia matematică.**
- **Şiruri particulare:** progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii, condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.
- **Mulţimea numerelor complexe:** numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, modulul unui număr complex, operaţii cu numere complexe.
- **Funcţii:** funcţia de gradul I, funcţia de gradul al II-lea, funcţia putere, funcţia radical, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică, injectivitate, surjectivitate, bijectivitate, funcţii inversabile, compunerea funcţiilor.
- **Ecuaţii:** ecuaţii iraţionale care conţin radicali de ordinul 2 sau 3, ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice, ecuaţii algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ecuaţii binome, ecuaţii reciproce, ecuaţii bipătrate.
- **Metode de numărare:** permutări, aranjamente, combinări, binomul lui Newton.
- **Vectori în plan şi aplicaţii ale calculului vectorial în geometria plană:** operaţii cu vectori, vectori coliniari, vectorul de poziţie al unui punct, vectorul de poziţie al centrului de greutate al unui triunghi.

- **Elemente de geometrie analitică în plan:** reper cartezian, coordonate carteziene, distanţa dintre două puncte în plan, coordonatele unui vector, ale sumei vectoriale şi ale produsului dintre un vector şi un număr real, ecuaţia dreptei în plan determinate de un punct şi de o direcţie dată, ecuaţia dreptei în plan determinate de două puncte distincte, condiţii de paralelism şi de perpendicularitate a două drepte din plan, coliniaritatea a trei puncte în plan, calcularea unor distanţe şi a unor arii.

- **Elemente de trigonometrie:** cercul trigonometric, funcţii trigonometrice directe şi inverse, reducerea la primul cadran, formule trigonometrice de bază ($\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$), ecuaţii trigonometrice ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $a \in [-1,1]$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$; $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$).

- **Aplicaţii ale trigonometriei şi ale produsului scalar al doi vectori în geometria plană:** produsul scalar al doi vectori (definiţie, proprietăţi), teorema cosinusului, rezolvarea triunghiului dreptunghic, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare, calcularea razei cercului înscris într-un triunghi şi a razei cercului circumscris unui triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii.

- **Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare:** operaţii cu matrice (adunarea, înmulţirea, înmulţirea unei matrice cu un scalar, proprietăţi), determinanţi (determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăţi), matrice inversabile, ecuaţii matriceale, sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult 3 necunoscute.

- **Grupuri:** legi de compoziţie internă, grupuri, grupuri numerice, morfism şi izomorfism de grupuri.

- **Inele şi corpuri:** inele, inele numerice, corpuri, corpuri numerice, izomorfism de inele şi corpuri.

- **Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ:** operaţii cu polinoame, divizibilitatea polinoamelor, c.m.m.d.c. şi c.m.m. m.c. ale unor polinoame, descompunerea polinoamelor în factori ireductibili, rădăcini ale polinoamelor, relaţiile lui Viète pentru polinoame având gradul cel mult 4.

- **Limite de funcţii, continuitate şi derivabilitate:** limita unei funcţii într-un punct, limite laterale, cazuri exceptate în calculul limitelor de funcţii, asimptotele graficului unei funcţii, continuitatea unei funcţii, operaţii cu funcţii continue, derivata unei funcţii într-un punct, derivabilitatea unei funcţii, calculul derivatelor de ordinul I şi al II-lea, regulile lui l'Hospital, studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor.
- **Primitivele unei funcţii şi integrala definită:** primitive uzuale, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite, proprietăţi ale integralei definite (liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare), metode de calcul al integralelor definite (integrarea prin părţi, integrarea prin schimbare de variabilă, integrarea prin metoda descompunerii în fracţii simple), aplicaţii ale integralei definite (aria unei suprafeţe plane, volumul unui corp de rotaţie).

CAPITOLUL 1

Enunţuri

Varianta 1

1. (3p) Se consideră progresia aritmetică 2, 4, 6,... Suma primilor 50 de termeni ai acestei progresii este:

$\boxed{\text{A}}$ 2450; $\boxed{\text{B}}$ 2500; $\boxed{\text{C}}$ 2550; $\boxed{\text{D}}$ 5100; $\boxed{\text{E}}$ 4900.

2. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 1 - a$. Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f are un singur punct comun cu axa Ox este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-2,-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1,2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1\}$.

3. (3p) Valoarea modulului numărului complex $z = \dfrac{2+\sqrt{6}i}{2-\sqrt{6}i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 1.

4. (3p) Soluţia ecuaţiei $\lg(-3x+23) = \lg(2x) + 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 6; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

5. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe x^4 în dezvoltarea $\left(x + \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $C_8^3 8^3$; $\boxed{\text{B}}$ $C_8^4 8^4$; $\boxed{\text{C}}$ $C_8^2 8^2$; $\boxed{\text{D}}$ $C_8^5 8^5$; $\boxed{\text{E}}$ $C_8^6 8^6$.

6. (3p) În planul Oxy se consideră triunghiul ABC, de vârfuri $A(2,6)$, $B(4,4)$, $C(-6,6)$. Lungimea medianei duse din A este:

$\boxed{A}$ $3\sqrt{2}$; $\boxed{B}$ $2\sqrt{2}$; $\boxed{C}$ $\sqrt{10}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{E}$ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

7. (3p) Ştiind că $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, atunci numărul $\sin x + \cos x$ este egal cu:

$\boxed{A}$ $-\dfrac{1}{4}$; $\boxed{B}$ $-\dfrac{5}{4}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{1}{4}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\boxed{E}$ $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

8. (3p) Valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (m-1)\,\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = (m-2)\,\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari este:

$\boxed{A}$ -2; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ $\dfrac{10}{7}$; $\boxed{D}$ $-\dfrac{2}{7}$; $\boxed{E}$ 3.

9. (3p) În triunghiul ABC avem $BC = 2$ şi $m\left(\widehat{A}\right) = 30^0$. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu:

$\boxed{A}$ $2\sqrt{3}$; $\boxed{B}$ $3\sqrt{7}$; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

10. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Valoarea lui $(f \circ f)(1)$ este:

$\boxed{A}$ 5; $\boxed{B}$ 3; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 15; $\boxed{E}$ 17.

11. (3p) Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ este:

$\boxed{A}$ $\{0,1\}$; $\boxed{B}$ $\{-1,2\}$; $\boxed{C}$ $\{2,4\}$; $\boxed{D}$ $\{2,3\}$; $\boxed{E}$ $\{3,4\}$.

12. (3p) Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

$\boxed{A}$ $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\boxed{B}$ $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\boxed{C}$ $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
$\boxed{D}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\boxed{E}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$. Asimptota verticală la graficul funcţiei f are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $x=0$; $\boxed{\text{B}}$ $x=-1$; $\boxed{\text{C}}$ $x=1$; $\boxed{\text{D}}$ $x=-2$; $\boxed{\text{E}}$ $x=2$.

14. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x+x^2\right)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{e}-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{e}-\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathrm{e}+\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{e}+\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{e}+1$.

15. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

16. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x^2+4$. Numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 4.

17. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+16}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{64}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\pi}{8}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\pi}{16}$.

18. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x^2+5x-2}{x-1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ ∞; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

19. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-4}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $-\ln 4$; $\boxed{\text{C}}$ $-\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln 4$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

20. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$. Atunci, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, valoarea derivatei $f'(x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{8}{x^2+8}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{8}{\sqrt{x^2+8}}$;

D $\dfrac{1}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$; E $\dfrac{1}{(x^2+8)^2\sqrt{x^2+8}}$.

21. (3p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Numărul natural n pentru care $\det(A^n) = 256$ este:

A 11; B 6; C 10; D 8; E 12.

22. (3p) Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Valoarea expresiei $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{x_4^2}$ este:

A -1; B 4; C -3; D 0; E 1.

23. (3p) Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x \circ y = \sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2+5}.$$

Ecuaţia $x \circ x = 3x$ are soluţia reală:

A -1; B 2; C $\sqrt{20}$; D $-\sqrt{20}$; E $\sqrt{10}$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Tangenta la graficul funcţiei f, care este paralelă cu axa Ox, are ecuaţia:

A $y = 0$; B $y = \dfrac{1}{2}$; C $y = 1$; D $y = 2$;
E $y = -1$.

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\operatorname{tg} x - 2x)$ este:

A 0; B 1; C ∞; D -1; E $-\infty$.

26. (3p) Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Suma modulelor rădăcinilor din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ale polinomului f este:

A 2; B $\dfrac{1}{2}$; C $\dfrac{1}{4}$; D 1; E 0.

27. (3p) Pe mulţimea $G = (3, \infty)$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = xy - 3x - 3y + 12.$$

Ecuaţia $x * x * x = 11$ are în mulţimea G soluţia:

$\boxed{\text{A}}$ 12; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 11; $\boxed{\text{E}}$ 5.

28. (3p) Partea întreagă a numărului $I = \displaystyle\int_{2022}^{2023} \frac{x}{x^3+2}\mathrm{d}x$ are valoarea:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2022; $\boxed{\text{D}}$ 2023; $\boxed{\text{E}}$ 2.

29. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_{x}^{x+1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ este:

$\boxed{\text{A}}$ ∞; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

30. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)(x - \ln x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

Varianta 2

1. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x+1}=x+1$ este:

A $\emptyset$; B $\{0\}$; C $\{0,1\}$; D $\{1\}$; E $\{-1,0,1\}$.

2. (3p) Se consideră progresia aritmetică 1, 4, 7, 10, ... Al douăzecilea termen al său este:

A 60; B 58; C 56; D 54; E 62.

3. (3p) Modulul numărului complex $z=\dfrac{1-3i}{1+3i}$ este:

A 2; B $\sqrt{3}$; C $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; D $\dfrac{1}{2}$; E 1.

4. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe x^6 din dezvoltarea $\left(x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ este:

A $C_8^4 2^4$; B $C_8^6 2^6$; C $C_8^5 2^5$; D 1; E 8.

5. (3p) Soluţia ecuaţiei $\log_3(x^2+9)-\log_3(2x)=1$ este:

A 0; B 1; C $\dfrac{1}{3}$; D 9; E 3.

6. (3p) Se consideră punctul $A(-1,0)$. Distanţa de la punctul A la dreapta d de ecuaţie $x-\sqrt{3}y+3=0$ este:

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; B $\dfrac{1}{2}$; C 2; D 1; E 0.

7. (3p) Valoarea numărului $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$ este:

A 2; B $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; C $\sqrt{2}$; D 1; E $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. (3p) Se consideră triunghiul ABC de vârfuri $A(-2,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,4)$. Ecuaţia medianei duse din vârful A este:

A $3x-y+1=0$; B $x-3y+5=0$; C $2x-3y+5=0$;

D $x+3y-5=0$; E $3x-y+5=0$.

9. (3p) Toate soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = \cos x$, care aparţin intervalului $[0, 2\pi]$, sunt:

A $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$; C $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{8}$;
D $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$; E $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Problemele **10., 11., 12.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x + 3^x - 2 \cdot 5^x, \text{ unde } a \in (0, \infty).$$

10. (3p) Derivata $f'(0)$ este:

A 1; B $\ln(3a)$; C $\ln \frac{3a}{25}$; D $\ln \frac{1}{25}$; E $\ln \frac{3}{25}$.

11. (3p) Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $a + \frac{1}{a}$ este egal cu:

A $\frac{75}{628}$; B $\frac{634}{75}$; C 2; D $\frac{5}{2}$; E $\frac{10}{3}$.

12. (3p) Dacă $a = \mathrm{e}$, atunci $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$; B $\mathrm{e} - 1$; C $\frac{2}{\ln 3} + \frac{8}{\ln 5}$; D $\mathrm{e} + 1$;
E $\mathrm{e} - 1 + \frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$.

Problemele **13., 14., 15.** se referă la funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln(1 - x).$$

13. (3p) Derivata $f'(x)$, pentru orice $x \in (0, 1)$, este:

A $\ln(1 - x) - \frac{x}{1 - x}$; B $\frac{x}{1 - x}$; C $\ln(1 - x) + 1$;
D $\ln(1 - x)$; E $\ln(1 - x) + \frac{x}{1 - x}$.

14. (3p) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $\frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=-1+\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\left(x-1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $y=-1$;
$\boxed{\text{C}}$ $y=-\mathrm{e}\left(x-1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $y=-1+\frac{1}{\mathrm{e}}$; $\boxed{\text{E}}$ $x=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{3}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

Problemele **16., 17., 18.** se referă la legea de compoziţie asociativă

$$x\circ y=xy-5x-5y+30,$$

definită pe mulţimea numerelor reale.

16. (3p) Elementul neutru ale legii ,,$\circ$” este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 0.

17. (3p) Numărul $1\circ 2\circ 3\circ ...\circ 800$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 22; $\boxed{\text{C}}$ 9; $\boxed{\text{D}}$ 10; $\boxed{\text{E}}$ 15.

18. (3p) Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ x\circ x=x$ este:
$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 22; $\boxed{\text{C}}$ 9; $\boxed{\text{D}}$ 10; $\boxed{\text{E}}$ 15.

Problemele **19., 20.** se referă la polinomul polinomul $f=X^3-2X^2-2X+3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

19. (3p) Care este valoarea numărului $x_1+x_2+x_3$?

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ -3; $\boxed{\text{E}}$ 1.

20. (3p) Care este valoarea numărului $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{16}{9}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{9}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{9}{4}$.

Problemele **21., 22., 23.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}.$$

21. (3p) Punctele de extrem ale funcţiei f sunt în număr de:

A 3; B 4; C 0; D 1; E 2.

22. (3p) Funcţia f este descrescătoare pe mulţimea:

A $(-\infty, 0]$; B $[-1, 2)$; C $(0, \infty)$; D $\mathbb{R}$; E $(0, 5)$.

23. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 xf\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1-3\mathrm{e}}{6}$; B $\frac{5-3\mathrm{e}}{6}$; C $\frac{1+3\mathrm{e}}{6}$; D $\frac{2-3\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}$;
E $\frac{-2+3\mathrm{e}}{4\mathrm{e}}$.

Problemele **24., 25., 26.** se referă la funcţia $f : (-8, 8) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln \frac{8+x}{8-x}.$$

24. (3p) Asimptotele la graficul funcţiei f sunt în număr de:

A 2; B 4; C 0; D 1; E 3.

25. (3p) Care este valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$?

A 8; B 4; C $\frac{1}{4}$; D $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$; E e^8.

26. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)} \mathrm{d}x$ este:

A 1; B $16 \ln \frac{8}{7} - 1$; C $16 \ln \frac{7}{8} - 1$; D $16 \ln \frac{8}{7} + 1$;
E -1.

Problemele **27., 28., 29.** se referă la matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

27. (3p) Valoarea determinantului matricei A este:

A 2; B 0; C -4; D 1; E 6.

28. (3p) Inversa matricei A este:

A $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

C $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

E $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

29. (3p) Valoarea numărului real a, pentru care $A^2 = A + a \cdot I_3$, este:

A 0; B -1; C 3; D 2; E -3.

30. (3p) Se consideră funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Limita $\lim\limits_{t \to \infty} \int_0^1 x^t f(x)\, \mathrm{d}x$ este egală cu:

A 1; B 0; C -1; D $\frac{1}{2}$; E 2.

Varianta 3

1. **(3p)** Soluţia în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei $2z - 3\bar{z} = 1 + 5i$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $1 + i$; $\boxed{\text{B}}$ $1 - i$; $\boxed{\text{C}}$ $-1 - i$; $\boxed{\text{D}}$ $-1 + i$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

2. **(3p)** Se consideră ecuaţia $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$, având rădăcinile x_1, x_2. Numărul $m \in \mathbb{R}^*$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = -3$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{4}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 1.

3. **(3p)** Ecuaţia $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = \frac{7}{4}$ are soluţia reală:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 16; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

4. **(3p)** Coeficientul lui x^4 în dezvoltarea $(2 + x)^{10}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $C_{10}^4 2^4$; $\boxed{\text{B}}$ 2^6; $\boxed{\text{C}}$ $C_{10}^4 2$; $\boxed{\text{D}}$ $C_{10}^4 2^6$; $\boxed{\text{E}}$ C_{10}^4.

5. **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{x} = x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1, 0, 1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1, 0\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\emptyset$.

6. **(3p)** Mulţimea numerelor reale care verifică ecuaţia $8^x - 8^{1-x} = 2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{8, \frac{2}{3}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

7. **(3p)** Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 1$. Atunci $\sin^2 x$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{4}$.

8. **(3p)** Raza cercului circumscris triunghiului ABC, având laturile de lungimi 4, 5, 7, este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{24}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{35\sqrt{6}}{24}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{6}}{24}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{35}{24}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{35\sqrt{6}}{12}$.

Problemele **9., 10., 11.** se referă la matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 2m \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$.

9. (3p) Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care matricea A este inversabilă, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10. (3p) Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{R}$, pentru care $A^{-1} = \frac{1}{2}A^*$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1,-2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1,-2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1,2\}$.

11. (3p) Mulţimea numerelor $m \in \mathbb{Z}$, pentru care $A^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{D}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,1\}$.

Problemele **12., 13., 14.** se referă la polinomul

$$f = (X+i)^{2022} + (X-i)^{2022} \in \mathbb{C}[X].$$

12. (3p) Valoarea numărului $f(-1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2^{1011}; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 2^{1012}; $\boxed{\text{E}}$ -2^{1011}.

13. (3p) Restul împărţirii polinomului f la $X+1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -2.

14. (3p) Numărul de rădăcini reale ale polinomului f este:

$\boxed{\text{A}}$ 2020; $\boxed{\text{B}}$ 2022; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 4.

Problemele **15., 16., 17.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

15. (3p) Funcţia f este strict crescătoare pe mulţimea:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $(1,2)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-1,1)$; $\boxed{\text{D}}$ $(-\infty,-1)$; $\boxed{\text{E}}$ $(1,\infty)$.

16. (3p) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x_0 = 0$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 2x$; $\boxed{\text{B}}$ $2y = x$; $\boxed{\text{C}}$ $y = -x$; $\boxed{\text{D}}$ $y = -2x$; $\boxed{\text{E}}$ $y = x$.

17. (3p) Pentru orice $x \in (0,\infty)$ numărul $f(x) -$ arctg x aparţine mulţimii:

$\boxed{\text{A}}$ $(1,\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $(0,1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0,\infty)$; $\boxed{\text{D}}$ $(1,2)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Problemele **18., 19., 20.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{25+x^2}.$$

18. (3p) Integrala $\displaystyle\int_{-5}^{5} xf(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

19. (3p) Aria domeniului mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 5$ şi $x = -5$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 25; $\boxed{\text{B}}$ $25\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $25\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

20. (3p) Limita $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_{x}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2023}$; $\boxed{\text{D}}$ 2023; $\boxed{\text{E}}$ ∞.

Problemele **21., 22.** se referă la triunghiul OAB, de vârfuri $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$.

21. (3p) Ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $x+y=1$; $\boxed{\text{B}}$ $x+y=2$; $\boxed{\text{C}}$ $x-y=2$; $\boxed{\text{D}}$ $x-y=1$;

$\boxed{\text{E}}$ $x=1$.

22. (3p) Aria triunghiului OAB este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{3}$.

Problemele **23., 24.** se referă la funcţia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+x$.

23. (3p) Integrala $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

A 2; B 4; C 0; D 6; E 12.

24. (3p) Integrala $\int_{-2}^{2} xf(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\frac{272}{15}$; B $\frac{1}{15}$; C $\frac{32}{15}$; D $\frac{8}{3}$; E $\frac{136}{15}$.

Problemele **25., 26., 27.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

25. (3p) Numărul de asimptote la graficul funcţiei f este:

A 0; B 2; C 5; D 3; E 4.

26. (3p) Integrala $\int_{0}^{1} xf\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $1+\ln 2$; B $\ln 2$; C $1-\ln 2$; D 1; E $2-\ln 2$.

27. (3p) Numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f este:

A 1; B 2; C 4; D 0; E 3.

Problemele **28., 29.** se referă la funcţia $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

28. (3p) Integrala $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\frac{1}{2}$; B π; C $\frac{\pi}{2}$; D $\frac{\pi}{4}$; E $\frac{\pi}{8}$.

29. (3p) Volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul axei Ox este:

A π^2; B $\frac{\pi^2}{2}$; C $\frac{\pi^2}{4}$; D π^2-1; E $\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{4}$.

30. (3p) Suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice 2, 4, 8, 16, ... aparţine intervalului:

A $(2^{11}-3, 2^{11}-1)$; B $(2^{10}-3, 2^{10}-1)$; C $(2^{12}-3, 2^{12}-1)$;
D $(2^{10}-1, 2^{10})$; E $(2^{11}-1, 2^{11})$.

Varianta 4

1. (3p) Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2mx + m = 0$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $m \in \left\{-1, \frac{3}{4}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $m \in \left\{1, \frac{3}{4}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $m \in \left\{0, -\frac{3}{4}\right\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$; $\boxed{\text{E}}$ $m \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

2. (3p) Soluţia ecuaţiei $\log_3 x + \log_9 x - \log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $x = \frac{1}{27}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \frac{1}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $x = \frac{1}{9}$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 3$;
$\boxed{\text{E}}$ $x = 9$.

3. (3p) Numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt{2}\right)^{20}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

4. (3p) Ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$, valoarea lui $\cos 2x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{\sqrt{1}}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{4}$.

5. (3p) Partea întreagă a numărului $\left(\sqrt{8} + 1\right)^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 14; $\boxed{\text{B}}$ 9; $\boxed{\text{C}}$ 13; $\boxed{\text{D}}$ 12; $\boxed{\text{E}}$ 10.

6. (3p) Care este valoarea numărului real a pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 2$ intersectează axa Ox într-un singur punct ?

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

7. (3p) Distanţa de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(4,0)$ şi $C(0,4)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. (3p) Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$?

$\boxed{\text{A}}$ A_5^3; $\boxed{\text{B}}$ C_5^3; $\boxed{\text{C}}$ 80; $\boxed{\text{D}}$ 70; $\boxed{\text{E}}$ 30.

9. (3p) Care este valoarea pozitivă a lui m, astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ şi $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - \vec{j}$ să fie perpendiculari ?

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{9}{7}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{9}{7}$; $\boxed{\text{D}}$ -2; $\boxed{\text{E}}$ 0.

10. (3p) Se consideră punctele $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(0,2)$. Numărul $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{CB}$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ -12; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 11; $\boxed{\text{D}}$ -13; $\boxed{\text{E}}$ 0.

11. (3p) Care sunt valorile parametrului real m, pentru care $x^2 - x - m > 0$, oricare ar fi număr real x ?

$\boxed{\text{A}}$ $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$;
$\boxed{\text{D}}$ $m \in (-\infty, 2)$; $\boxed{\text{E}}$ $m \in (-\infty, 4)$.

Problemele **12.**, **13.** se referă la matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a),\ X(a) = I_2 + aA,\ a \in \mathbb{R}\}$.

12. (3p) Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$ matricea $X(a) \cdot X(b)$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $X(10ab)$; $\boxed{\text{B}}$ $X(a+b)$; $\boxed{\text{C}}$ $X(a+b-ab)$;
$\boxed{\text{D}}$ $X(a+b-10ab)$; $\boxed{\text{E}}$ $X(a+b-9ab)$.

13. (3p) Câte soluţii în mulţimea G are ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & -\frac{36}{5} \\ -\frac{36}{5} & \frac{113}{5} \end{pmatrix}$?

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

14. (3p) Se consideră mulţimea $G = (-1,1)$, legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ şi $f : G \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ izomorfism de grupuri de la $(G,*)$ la $((0,\infty),\cdot)$. Numărul $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{4} * \dfrac{1}{6} * \ldots * \dfrac{1}{2022}$ este egal cu:

A $\frac{1}{2023}$; B $\frac{1}{2022}$; C $\frac{1011}{1012}$; D $\frac{1011}{2023}$; E $\frac{3}{2023}$.

Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3x+ay+z=0 \\ x-y+z=\frac{4}{5} \end{cases}$, unde numărul a este real. Problemele **15., 16.** se referă la acest sistem.

15. (3p) Pentru $a = 0$, valoarea determinantului matricei pătratice asociate sistemului dat este:

A -7; B -3; C -9; D 0; E -8.

16. (3p) Pentru $a = -7$, sistemul dat are:

A o singură soluţie; B două soluţii;
C o infinitate de soluţii; D trei soluţii; E nicio soluţie.

Problemele **17., 18.** se referă la polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

17. (3p) Ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X+1$ este 31, valoarea numărului $-a+b-c$ este:

A 31; B 25; C 57; D 0; E 28.

18. (3p) Valoarea lui $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1x_2x_3x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 37$, este:

A -37; B 70; C -36; D -70; E 36.

Problemele **19., 20., 21.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2+5}{x^2+1}$.

19. (3p) Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A $\frac{-8x}{(x^2+1)(x^2+5)}$; B $\frac{-6x}{(x^2+1)(x^2+5)}$; C $\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+5)}$;
D $\frac{-8x}{(x^2+1)}$; E $\frac{-2x}{(x^2+5)}$.

20. (3p) Asimptota la graficul funcţiei f este:

A $y = 1$ asimptotă orizontală la $+\infty$;
B $x = 0$ asimptotă verticală;
C $y = \mathrm{e}$ asimptotă orizontală la $-\infty$;
D $y = \mathrm{e}$ asimptotă orizontală la $+\infty$;
E $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$.

21. (3p) Limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$ este egală cu:

A $+\infty$; B 4; C 2; D 1; E 0.

Problemele **22., 23., 24.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2+4}$.

22. (3p) Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A $x\dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$; B $x^2\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$;
C $2x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$; D $2x\dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$;
E $x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$.

23. (3p) Imaginea funcţiei f este:

A $(9, 33]$; B $(8, 33]$; C $(0, 3]$; D $(10, 13]$;
E $(-5, -1]$.

24. (3p) Limita $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ este egală cu:

A $\dfrac{2}{3}$; B ;$\dfrac{21}{2}$ C 21; D 0; E $\dfrac{29}{2}$.

25. (3p) Se consideră integrala $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{5x^2+x+1}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. Limita $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$ este egală cu:

A $\dfrac{1}{7}$; B 0; C $\dfrac{1}{5}$; D $\dfrac{1}{6}$; E ∞.

Problemele **26.**, **27.**, **28.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}$.

26. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+2\right)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A $-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$; B $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$; C $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$; D $-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$; E $\frac{1}{2}\ln 20$.

27. **(3p)** Limita $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$ este egală cu:

A ∞; B 2; C $\frac{1}{2}$; D $-\infty$; E 0.

28. **(3p)** Aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ este:

A $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3-\frac{1}{5}\ln 5$; B $\frac{1}{5}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3-\frac{1}{6}\ln 5$; C $\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{4}\ln 5$; D $\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 3$; E $\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{4}\ln 5$.

Problemele **29.**, **30.** se referă la funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(4x)-\dfrac{1}{x}$.

29. **(3p)** Ecuaţia tangentei la graficului funcţiei f în punctul de abscisă x_0, ştiind că această tangentă este paralelă cu dreapta $y=2x$, este:

A $y-\ln\frac{4}{\mathrm{e}}=2(x-1)$; B $y+\ln\frac{4}{\mathrm{e}}=2(x-1)$; C $y=2x$;

D $y-\ln\frac{4}{\mathrm{e}}=2(x+1)$; E $y+\ln\frac{4}{\mathrm{e}}=2(x+1)$.

30. **(3p)** Integrala $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln(2\mathrm{e})$; $\boxed{\text{B}}$ $2(\mathrm{e}-1)\ln 4$; $\boxed{\text{C}}$ $2\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $2(\mathrm{e}-1)\ln 2$;

$\boxed{\text{E}}$ $2(\mathrm{e}-2)\ln 2$.

Varianta 5

1. (3p) Soluţia reală a ecuaţiei $\sqrt{3x+19}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+7}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $x=-\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $x=\dfrac{4}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $x=0$; $\boxed{\text{D}}$ $x=2$;
$\boxed{\text{E}}$ $x=1$.

2. (3p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului m, pentru care graficele funcţiilor $f(x)=x^2-2x-4$ şi $g(x)=-x^2+2m^2x+6m$ au acelaşi vârf.

$\boxed{\text{A}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0,2\}$.

3. (3p) Fie $m\in\mathbb{R}$ şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(m+2)x+m=0$. Determinaţi valorile lui m, pentru care $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_1}=-4$.

$\boxed{\text{A}}$ $m\in\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $m=-1$; $\boxed{\text{C}}$ $m=-2$; $\boxed{\text{D}}$ $m\in\{0,-2\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $m=0$.

4. (3p) Să se rezolve inecuaţia $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-6x-x^2}<\dfrac{27}{64}$.

$\boxed{\text{A}}$ $x<1$; $\boxed{\text{B}}$ $x>1$; $\boxed{\text{C}}$ $x\in(-7,1)$; $\boxed{\text{D}}$ $x\in(0,1)$;
$\boxed{\text{E}}$ $x\in\emptyset$.

5. (3p) Să se rezolve ecuaţia $\log_{x+2}x+\log_x(x+2)=\dfrac{5}{2}$.

$\boxed{\text{A}}$ $x=2$; $\boxed{\text{B}}$ $x=\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $x\in\{1,3\}$; $\boxed{\text{D}}$ $x=\sqrt{2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $x=0$.

6. (3p) Dacă $z\in\mathbb{C}$ este soluţie a ecuaţiei $|z|+z=8+4i$, atunci $|z|$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 8; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 1.

7. (3p) Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 14; $\boxed{\text{C}}$ 17; $\boxed{\text{D}}$ 24; $\boxed{\text{E}}$ 31.

8. (3p) Să se calculeze partea reală a numărului complex $z = \dfrac{1-i}{1+i}$.

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

9. (3p) Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x,\ y \in \mathbb{Z}$. Suma elementelor inversabile în raport cu legea $\circ$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 4.

10. (3p) Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

11. (3p) Ecuaţia $2x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$ are soluţiile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Determinaţi numărul $\dfrac{1}{1+x_1} \cdot \dfrac{1}{1+x_2} \cdot \dfrac{1}{1+x_3} \cdot \dfrac{1}{1+x_4} \cdot \dfrac{1}{1+x_5}$.

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

12. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt{5^x + 5^y}$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * x = 5^{\frac{x+4}{4}}$.

$\boxed{\text{A}}$ $x = \log_5 \dfrac{625}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \log_5 \dfrac{4}{625}$; $\boxed{\text{C}}$ $x = \log_5 4$;

$\boxed{\text{D}}$ $x = 4$; $\boxed{\text{E}}$ $x \in \emptyset$.

13. (3p) Pe mulţimea $G = (-3, 3)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă

$$x * y = \frac{9x + 9y}{9 + xy}.$$

Calculaţi $\dfrac{3}{2} * \dfrac{3}{3} * \dfrac{3}{4} \ldots * \dfrac{3}{20}$, ştiind că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

A $\frac{211}{627}$; B $\frac{627}{211}$; C 627; D 211; E 1.

14. (3p) Deteminaţi numărul $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pentru care $\int_1^{\sqrt[4]{2}} e^{\alpha x^4 + \ln x^3} dx = \frac{3}{\alpha}$.

A 2; B $\ln 4$; C 4; D 1; E $-\ln 4$.

15. (3p) Se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5x+8} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $5I_{n+1} + 8I_n$ este egal cu:

A $\frac{1}{n+2}$; B $\frac{1}{n+1}$; C $\frac{1}{n+3}$; D $\frac{5}{n+1}$; E $\frac{8}{n+1}$.

16. (3p) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\text{tg } x + \text{tg}^3 x + \text{tg}^{2022} x + \text{tg}^{2024} x\right) dx$.

A $\frac{2025}{4046}$; B $\frac{2025}{2023}$; C $\frac{2024}{2023}$; D $\frac{4046}{2025}$; E 1.

17. (3p) Să se calculeze $\lim_{x \searrow 0} x (\text{ctg } x + \ln x)$.

A π; B 0; C 1; D -1; E $-\infty$.

18. (3p) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

A f are un singur punct de inflexiune;
B f are un singur punct de extrem local;
C f nu are puncte de extrem local; D f este crescătoare;
E $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f.

19. (3p) Fie $f(x) = \text{arctg } x + \text{arcctg } x$, $\forall x \in (0, \infty)$. Care afirmaţie este adevărată ?

A $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$; B $f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;
C $f(x) = 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$; D $f(x) = \pi$, $\forall x \in (0, +\infty)$;
E $f(x) = 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

20. (3p) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+4x$. Determinaţi valoarea lui $m\in\mathbb{R}$, pentru care dreapta de ecuaţie $y=mx+4$ este tangentă la graficul funcţiei f.

$\boxed{\text{A}}$ $m=1$; $\boxed{\text{B}}$ $m=11$; $\boxed{\text{C}}$ $m=10$; $\boxed{\text{D}}$ $m=0$;
$\boxed{\text{E}}$ $m=2$.

21. (3p) Asimptotele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $y=\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote orizontale; $\boxed{\text{B}}$ $y=x$ asimptotă oblică;
$\boxed{\text{C}}$ $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$ asimptote oblice;
$\boxed{\text{D}}$ $y=-x\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote oblice; $\boxed{\text{E}}$ $y=\pm\frac{\pi}{2}$ asimptote verticale.

22. (3p) Primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+C$; $\boxed{\text{B}}$ $\ln\left(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$;
$\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+C$; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}+C$; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}+C$.

23. (3p) Determinaţi $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x$, $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$.

$\boxed{\text{A}}$ $\ln\dfrac{1}{1-\ln^2 x}+C$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{1-\ln^2 x}+C$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{1-x^2}+C$;
$\boxed{\text{D}}$ $\ln\dfrac{1}{1-x^2}+C$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln\dfrac{1}{x^2-1}+C$.

24. (3p) Fie $l:=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\operatorname{arctg}t\,\mathrm{d}t$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ ∞; $\boxed{\text{B}}$ $l=\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 2.

25. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Calculaţi aria domeniului mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox, şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

$\boxed{\text{A}}$ $1-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $1+\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$;
$\boxed{\text{C}}$ $1-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $1+\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$;
$\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

26. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} f(\sqrt{x})$.

A $\frac{\pi(\mathrm{e}^2 - 3)}{4\mathrm{e}^2}$; B $\frac{\pi(\mathrm{e}^2 - 3)}{\mathrm{e}^2}$; C $\frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4\mathrm{e}^2}$; D $\frac{\pi(\mathrm{e}^2 - 3)}{2\mathrm{e}^2}$;
E $\frac{2\pi(\mathrm{e}^2 - 3)}{\mathrm{e}^2}$.

27. (3p) Determinaţi toate valorile numărului real a, pentru care ecuaţia $x^2 - 2x + \sin^2 a = 0$ are soluţii reale.

A $a \in \mathbb{R}$; B $a = 1$; C $a = -1$; D $a = 0$; E $a = \frac{\pi}{2}$.

28. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ şi $C(0, 5)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin C la AB.

A $x - y = 0$; B $x - y + 5 = 0$; C $x + y + 5 = 0$;
D $x + y = 0$; E $x + y + 1 = 0$.

29. (3p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ şi $C(-4, 0)$. Calculaţi lungimea înălţimii duse din vârful A al triunghiului ABC.

A $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; B $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; C $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D $\frac{\sqrt{2}}{3}$; E $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

30. (3p) Fie ABC un triunghi care are $BC = 5$ şi $\cos A = \frac{3}{5}$. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$.

A $\frac{25}{4}$; B $\frac{25}{2}$; C $\frac{25}{8}$; D $\frac{25}{16}$; E $\frac{25}{32}$.

Varianta 6

1. **(3p)** Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{1-x^2} = x+1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-1,0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1,0,1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\emptyset$.

2. **(3p)** Se consideră progresia geometrică 1, 2, 2^2, 2^3, ... Suma primilor zece termeni este:

$\boxed{\text{A}}$ 1000; $\boxed{\text{B}}$ 1024; $\boxed{\text{C}}$ 1023; $\boxed{\text{D}}$ 1001; $\boxed{\text{E}}$ 2000.

3. **(3p)** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$, atunci expresia $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ i; $\boxed{\text{E}}$ $i\sqrt{3}$.

4. **(3p)** Numărul submulţimilor formate numai cu numere pare ale mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 8; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 64; $\boxed{\text{D}}$ 7; $\boxed{\text{E}}$ 32.

5. **(3p)** Dacă suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $(2^a+3b)^n$ este egală 1024, atunci n este:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 12; $\boxed{\text{D}}$ 9; $\boxed{\text{E}}$ 10.

6. **(3p)** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + (m-1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{CD} = (n+1)\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, unde m, n sunt numere reale. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci m şi n iau valorile:

$\boxed{\text{A}}$ $m=1$, $n=-1$; $\boxed{\text{B}}$ $m=5$, $n=2$; $\boxed{\text{C}}$ $m=2$, $n=5$;
$\boxed{\text{D}}$ $m=2$, $n=0$; $\boxed{\text{E}}$ $m=3$, $n=-2$.

Problemele **7.**, **8.**, **9.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = |x+1| - |x-1|.$$

7. **(3p)** Derivata în 0, $f'(0)$, este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ ∞.

8. **(3p)** Funcţia f este:

$\boxed{\text{A}}$ continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; C continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; D continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; E continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

A 0; B 2; C $\frac{1}{2}$; D -1; E 1.

10. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, două puncte M_1 şi M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile $y = \log_2(3^x + 4^x)$ şi $y = \log_2 5^x$. Distanţa de la originea reperului la punctul de intersecţia al traiectoriilor este:

A 0; B 1; C $2\sqrt{1 + \log_2^2 5}$; D $\log_2 5$; E -1.

11. (3p) Dacă $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (0, \pi)$, atunci $\sin 2x$ este:

A 0; B $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C $-\frac{1}{2}$; D $\frac{\sqrt{3}}{2}$; E $\frac{1}{2}$.

12. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se dau punctele $A(1, 0)$ şi $B(0, 2)$. Aria triunghiului OAB este:

A 1; B $\frac{1}{2}$; C -1; D 2; E $\frac{3}{2}$.

Problemele **13.**, **14.**, **15.** se referă la polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 3X^2 + aX - 1$.

13. (3p) Valoarea lui $f(0)$ este:

A 1; B -1; C a; D 0; E $a - 3$.

14. (3p) Dacă $X^2 - 2X + 1$ divide polinomul f, atunci valoarea lui a este:

A 3; B 2; C -2; D 0; E 1.

15. (3p) Pentru $a = 3$, rădăcinile polinomului f sunt:

A $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1$; B $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; C $x_{1,2,3} = -1$; D $x_{1,2,3} = 1$; E $x_{1,2} = -1$, $x_3 = 1$.

Problemele **16.**, **17.**, **18.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{dacă} \quad x<0\\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$$

16. (3p) Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ este:

A 0; B -1; C 1; D $\frac{1}{2}$; E e.

17. (3p) Valoarea sumei $f_s'(0)+f_d'(0)$ este:

A 0; B 1; C -1; D e^{-1}; E e.

18. (3p) O primitivă F a funcţiei f pe $\mathbb{R}$ este:

A $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x & \text{dacă} \quad x<0\\ -e^{-x} & \text{dacă} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$

B $F(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{dacă} \quad x<0\\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$

C $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x-e^{-x}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$

D $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+2023 & \text{dacă} \quad x<0\\ -e^{-x}+2024 & \text{dacă} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$

E $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+2023 & \text{dacă} \quad x<0\\ -e^{-x}+2023 & \text{dacă} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$

Problemele **19.**, **20.** se referă la matricea $A=\begin{pmatrix} a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

19. (3p) Rangul matricei A este un număr din mulţimea:

A $\{1\}$; B $\{0,1\}$; C $\{1,2,3\}$; D $\{0,1,2,3\}$; E $\emptyset$.

20. (3p) Pentru $a=1$, matricea A^{2023} este egală cu:

A $3^{2023}A$; B $(3^{2022}-1)\,A$; C A; D $3^{2022}A$; E $3^{2024}A$.

Problemele **21.**, **22.**, **23.** se referă la funcţiile $f_1,\ f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,, \quad f_2(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,.$$

21. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x$ este:

A 1; B 0; C $\frac{\pi}{2}$; D π; E $\frac{\pi}{4}$.

22. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$ este:

A 0; B -1; C $\frac{\pi}{2}$; D 1; E $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

23. (3p) Integralele $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\mathrm{d}x$ şi $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\mathrm{d}x$ sunt egale cu:

A $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{2}$; B $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$; C $I_1 = -\frac{\pi}{2},\ I_2 = \frac{\pi}{2}$;
D $I_1 = 0,\ I_2 = \frac{\pi}{2}$; E $I_1 = \frac{\pi}{2},\ I_2 = 0$.

Problemele **24.**, **25.**, **26.** se referă la funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = x \ln^2 x\,.$$

24. (3p) Numărul de asimptote ale graficului funcţiei f este egal cu:

A 1; B 2; C 3; D -1; E 0.

25. (3p) Funcţia f are

A un punct de maxim local şi un punct de minim local;
B două puncte de minim local; C două puncte de maxim local;
D niciun punct de extrem local; E trei puncte de extrem local.

26. (3p) Ecuaţia $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$ are trei rădăcini reale distincte dacă

A $m \in \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$; B $m \in (0, 1)$; C $m \in \left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$;
D $m \in \left(\frac{4}{e^2}, 1\right)$; E $m \in \left(0, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)$.

Problemele **27.**, **28.** se referă la sistemul liniar $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= -1 \\ -x+y+z &= 1 \end{cases}$.

27. (3p) Determinantul matricii sistemului este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ -4; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -1.

28. (3p) Soluţia sistemului liniar este:

$\boxed{\text{A}}$ $(0,0,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $(1,-1,1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-1,0,1)$; $\boxed{\text{D}}$ $(1,1,1)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(0,1,0)$.

29. (3p) Dacă în triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 13$, $AB = 12$, $AC = 5$, atunci $\sin B$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5}{13}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{12}{13}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -1.

30. (3p) Vârful parabolei asociate funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $V(1,1)$; $\boxed{\text{B}}$ $V(0,0)$; $\boxed{\text{C}}$ $V(1,-1)$; $\boxed{\text{D}}$ $V(1,0)$;
$\boxed{\text{E}}$ $V(0,1)$.

Varianta 7

1. (3p) Fie numărul complex $z = 1 - i$. Atunci $(z-1)^{2023}$ este:

$\boxed{A}$ -1; $\boxed{B}$ 0; $\boxed{C}$ $-i$; $\boxed{D}$ i; $\boxed{E}$ 1.

2. (3p) Se consideră progresia aritmetică $a_n = n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$. Suma primilor zece termeni este:

$\boxed{A}$ 10; $\boxed{B}$ 15; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ -10; $\boxed{E}$ 30.

3. (3p) Ecuaţia $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ are rădăcinile:

$\boxed{A}$ $-2,\ 4$; $\boxed{B}$ 4; $\boxed{C}$ $0,\ 2$; $\boxed{D}$ $0,\ 4$; $\boxed{E}$ 2.

4. (3p) Suma $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, este:

$\boxed{A}$ 2^{2n}; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ 2^n; $\boxed{D}$ 3^n; $\boxed{E}$ 3^{2n}.

5. (3p) Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $x + y - 2 = 0$ este:

$\boxed{A}$ $x - y + 2 = 0$; $\boxed{B}$ $x + y + 2 = 0$; $\boxed{C}$ $x - y - 2 = 0$;
$\boxed{D}$ $2x - y + 2 = 0$; $\boxed{E}$ $x + y - 2 = 0$.

6. (3p) Funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, al cărei grafic conţine punctele $A(-1,0)$, $B(1,2)$ şi originea O a reperului cartezian xOy este:

$\boxed{A}$ $f(x) = x^2+x+1$; $\boxed{B}$ $f(x) = x^2+x-1$; $\boxed{C}$ $f(x) = x^2+x$;
$\boxed{D}$ $f(x) = 2x^2 + x + 1$; $\boxed{E}$ $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, două puncte M_1 şi M_2 se deplasează în plan urmând traiectoriile rectilinii $d_1 : y = 2x + 1$ şi $d_2 : y = 5x - 2$. Atunci punctul de intersecţie al traiectoriilor, $d_1 \cap d_2 = \{M\}$, este:

$\boxed{A}$ $M(1,1)$; $\boxed{B}$ $M(-1,0)$; $\boxed{C}$ $M(1,3)$; $\boxed{D}$ $M(0,0)$;
$\boxed{E}$ $M(3,1)$.

8. (3p) Media geometrică a numerelor $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ şi $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ este:

$\boxed{A}$ $\sqrt[4]{20}$; $\boxed{B}$ $2\sqrt{5}$; $\boxed{C}$ $\sqrt[4]{5}$; $\boxed{D}$ $\sqrt{5}$; $\boxed{E}$ 1.

Problemele **9.**, **10.**, **11.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

9. (3p) Limita $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

10. (3p) Derivata funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $f'(x) = -\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $\boxed{\text{B}}$ $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$;
$\boxed{\text{C}}$ $f'(x) = -\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$; $\boxed{\text{D}}$ $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$.

11. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $2\ln 5$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

12. (3p) Dacă $\sin x = \dfrac{5}{13}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin 2x + \cos 2x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{239}{169}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{144}{169}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{5}{13}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

13. (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului circumscris triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ 6; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 5.

Problemele **14.**, **15.**, **16.** se referă la polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - X^2 - X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

14. (3p) Câtul q şi restul r al împărţirii lui f la $g = X + 1$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $q = (X-1)^2$, $r = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $q = X - 1$, $r = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $q = (X-1)^2$, $r = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $q = (X-1)^2$, $r = X + 1$; $\boxed{\text{E}}$ $q = (X-1)^2$, $r = (X + 1^2)$.

15. (3p) Rădăcinile polinomului f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$;

C $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; D $x_1 = x_2 = x_3 = -1$;
E $x_1 = -1$, $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$.

16. (3p) Suma $S = x_1^{2023} + x_2^{2023} + x_3^{2023}$ este:

A -1; B 0; C $2i$; D 1; E $-2i$.

Problemele **17.**, **18.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & \text{dacă} \quad x < 0 \\ \dfrac{e^x}{x+1} & \text{dacă} \quad x \geq 0\,, \end{cases} \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

17. (3p) Funcţia f este continuă dacă şi numai dacă valoarea lui a este:

A e; B 2; C -1; D 1; E 0.

18. (3p) Pentru $a = 1$, valoarea sumei $S = f'\left(-\frac{1}{2}\right) + f_s'(0) + f_d'(0)$ este:

A -1; B 1; C 0; D e; E e.

Problemele **19.**, **20.** se referă la matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

19. (3p) Dacă $\det A = 0$, atunci m este:

A 2; B 1; C 0; D $\frac{1}{2}$; E 3.

20. (3p) Pentru $m = 1$, inversa matricii A este:

A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Problemele **21.**, **22.**, **23.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}\,.$$

21. (3p) Ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x=-1,\ y=x+1$; $\boxed{\text{B}}$ $x=-1,\ y=x$; $\boxed{\text{C}}$ $x=1,\ y=1$;
$\boxed{\text{D}}$ $x=-1,\ y=1$; $\boxed{\text{E}}$ $x=-1,\ y=0$.

22. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $1-2\ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $1-\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $1+2\ln 2$;
$\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

23. (3p) Derivata inversei funcţiei f în punctul -1, $\left(f^{-1}\right)'(-1)$, este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

Problemele **24.**, **25.**, **26.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x+e^{-x}.$$

24. (3p) Dacă m este numărul de asimptote ale graficului funcţiei f şi n este numărul de puncte de extrem ale lui f, atunci $m+n$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ 3.

25. (3p) Funcţia $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, $f(x)=x+e^{-x}$ este

$\boxed{\text{A}}$ bijectivă; $\boxed{\text{B}}$ surjectivă, dar nu injectivă;
$\boxed{\text{C}}$ injectivă, dar nu surjectivă; $\boxed{\text{D}}$ nici injectivă, nici surjectivă;
$\boxed{\text{E}}$ inversabilă.

26. (3p) Ecuaţia $f(x)=m$, unde $m\in\mathbb{R}$ are două rădăcini reale distincte dacă

$\boxed{\text{A}}$ $m\in(0,1)$; $\boxed{\text{B}}$ $m<1$; $\boxed{\text{C}}$ $m>1$; $\boxed{\text{D}}$ $m\geq 1$; $\boxed{\text{E}}$ $m=1$.

Problemele **27.**, **28.** se referă la funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}},\ D\subseteq\mathbb{R}.$$

27. (3p) Domeniul maxim de definiţie al lui f este:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $(-1,1)$.

28. (3p) Limita $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{a+1}^{a+2} f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$); $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $+\infty$.

29. (3p) Relativ la baza ortonormată $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ a reperului cartezian xOy, se consideră vectorii $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + (m+1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali, atunci m ia valoarea:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{5}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

30. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-x^2} = 1-x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{\frac{1}{2}, 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1, 1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\emptyset$.

Varianta 8

1. (3p) Dacă punctul $M(-1, m)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, atunci numărul real m este:

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

2. (3p) Modulul numărului complex $z = \left[\left(\sqrt{7} - 1\right) + i\left(\sqrt{7} + 1\right)\right]^{2023}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4^{2023}; $\boxed{\text{B}}$ 2^{2023}; $\boxed{\text{C}}$ 7; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{7}^{\,2023}$.

3. (3p) Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $25^x + 35^x = 2 \cdot 49^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0, 2\}$.

4. (3p) Cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{1000}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ T_{599}; $\boxed{\text{B}}$ T_{600}; $\boxed{\text{C}}$ T_{601}; $\boxed{\text{D}}$ T_{1001}; $\boxed{\text{E}}$ T_1.

5. (3p) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$, atunci suma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -2.

6. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. Dacă punctul B este atât mijlocul segmentului AA' cât şi mijlocul segmentului CC', atunci punctele A' şi C' sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $A'(1, 2), C'(2, 1)$; $\boxed{\text{B}}$ $A'(1, -1), C'(-1, 1)$; $\boxed{\text{C}}$ $A'(2, 2), C'(2, 1)$;

$\boxed{\text{D}}$ $A'(1, 2), C'(2, 2)$; $\boxed{\text{E}}$ $A'(-1, 2), C'(2, -1)$.

7. (3p) Fie triunghiul ABC pentru care avem $\sin(A + B) + \cos C = 1$. Atunci unghiul C are masura egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $45°$; $\boxed{\text{B}}$ $90°$; $\boxed{\text{C}}$ $60°$; $\boxed{\text{D}}$ $30°$; $\boxed{\text{E}}$ $120°$.

8. (3p) Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_1 + z_2 \text{ , pentru orice } z_1, z_2 \in \mathbb{C} .$$

Atunci determinaţi răspunsul unic corect dintre variantele:

A elementul neutru este -1; B $z*(-1) = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
C toate elementele sunt simetrizabile; D elementul neutru este 1;
E $(\mathbb{C}, *)$ este grup comutativ.

Problemele **9.**, **10.**, **11.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}.$$

9. (3p) Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ este:

A 0; B $+\infty$; C nu există; D e; E $-\infty$.

10. (3p) Funcţia f este:

A continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$;
B continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
C continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;
D continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
E continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$.

11. (3p) Limita $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$ este:

A 0; B 1; C $\frac{1}{e}$; D $1-e$; E $\frac{1-e}{e}$.

12. (3p) Dacă $\sin a = \frac{1}{2}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\dfrac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{\sin a - 2\sqrt{3}\cos a}$ este:

A $\frac{1}{2}$; B $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; C $-\frac{4}{5}$; D $-\frac{2}{5}$; E 0.

13. (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului înscris în triunghiul ABC este:

A $\frac{1}{2}$; B 1; C 2; D 3; E $\frac{3}{2}$.

Problemele **14.**, **15.**, **16.** se referă la matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix},$$

unde ω este una dintre rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$.

14. (3p) Determinantul matricei A este:

A 1; B ω; C $3\omega(\omega - 1)$; D $\omega^2 - \omega$; E -1.

15. (3p) Matricea A^2 este egală cu:

A $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. (3p) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, matricea A^{2n} este egală cu:

A A^2; B A^4; C A;
D o matrice cu toate elementele numere reale; E $I_3 - A$.

Problemele **17.**, **18.**, **19.** se referă la funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x}.$$

17. (3p) Valoarea lui $f(1)$ este:

A 1; B $-\frac{1}{e}$; C -1; D 1; E 0.

18. (3p) Imaginea intervalului $(0, +\infty)$ prin funcţia f este:

A $(0, +\infty)$; B $(1, +\infty)$; C $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; D $\mathbb{R}$; E $(0, 1)$.

19. (3p) Integrala $\displaystyle\int_1^e x f(x)\, \mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{e-1}{4}$; B $\dfrac{e^2+e}{2}$; C $\dfrac{e^2}{2}$; D $\dfrac{e^2-3e}{4}$; E $\dfrac{e^2-4e+5}{4}$.

Problemele **20.**, **21.**, **22.** se referă la matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ .$$

20. (3p) Determinantul matricii A este:

$\boxed{\text{A}}$ $a_1a_2a_3$; $\boxed{\text{B}}$ $(a_2+a_1)(a_3+a_1)(a_3+a_2)$;
$\boxed{\text{C}}$ $(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$; $\boxed{\text{D}}$ $a_1+a_2+a_3$;
$\boxed{\text{E}}$ $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$.

21. (3p) Dacă A^t notează transpusa matricii A, atunci determinantul matricii AA^t este:

$\boxed{\text{A}}$ $(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)^2$; $\boxed{\text{B}}$ $(a_1+a_2+a_3)^2$; $\boxed{\text{C}}$ $a_1^2a_2^2a_3^2$;
$\boxed{\text{D}}$ $(a_2-a_1)^2(a_3-a_1)^2(a_3-a_2)^2$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

22. (3p) Dacă $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, atunci mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen de matrice A este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{(1,1,1)\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{(0,0,0)\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{(a,a,a)\,|a\in\mathbb{R}\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{(-1,0,1)\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\{(a,-a,a)\,|a\in\mathbb{R}\}$.

Problemele **23.**, **24.**, **25.** se referă la funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \ .$$

23. (3p) Domeniul de definiţie D al funcţiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $(0,+\infty)$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $(-1,+\infty)$.

24. (3p) Derivata funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$; $\boxed{\text{B}}$ $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^2+x+1)^2}$;
$\boxed{\text{C}}$ $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $\boxed{\text{D}}$ $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$;
$\boxed{\text{E}}$ $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

25. (3p) Integrala $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; B $\frac{\pi}{3}$; C π; D $\frac{1}{\sqrt{3}}$; E $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Problemele **26.**, **27.**, **28.** se referă la numărul real dat de integrala

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\mathrm{d}x\,,\ \text{pentru orice număr natural } n.$$

26. (3p) Valorile integralelor I_0 şi I_1 sunt:

A $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$; B $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln 2$; C $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$;
D $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \sqrt{2}$; E $I_0 = \pi$, $I_1 = \ln 2$.

27. (3p) Pentru orice $n \geq 2$, suma $I_{n-2} + I_n$ este egală cu:

A $\frac{1}{n+1}$; B $\frac{1}{n}$; C $\frac{2}{n-1}$; D $\frac{1}{n+2}$; E $\frac{1}{n-1}$.

28. (3p) Şirul de numere reale $(I_n)_n$ verifică:

A $\frac{n}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$, $\forall n \geq 2$; B $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n \geq 2$;
C $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$; D $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 2$;
E $\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 2$.

Problemele **29.**, **30.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,.$$

29. (3p) Asimptotele graficului funcţiei f au ecuaţiile:

A $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; B $x = 0$, $y = 0$; C $x = -1$, $x = 0$, $y = 1$;
D $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$; E $x = -1$, $x = 0$.

30. (3p) Ecuaţia $f(x) = m$ are exact o rădăcină reală dacă şi numai dacă:

A $m \in [-4, 0]$; B $m = -4$; C $m \in (-\infty, -4]$;
D $m \in (0, +\infty)$; E $m \in (-4, 0]$.

Varianta 9

1. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x^2+1} = x+1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,1\}$.

2. (3p) Se consideră progresia geometică $b_n = (-2023)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Raţia progesiei este:

$\boxed{\text{A}}$ 2023; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2023^2; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -2023.

3. (3p) Modulul numărului complex $z = \dfrac{1+2023i}{1-2023i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

4. (3p) Suma $S = C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \cdots + (-2)^n C_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $(-1)^n$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $n+1$.

5. (3p) Soluţia ecuaţiei $\ln(x^2+1) - \ln(2x) = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ e; $\boxed{\text{E}}$ -1.

6. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(1,1)$. Simetricul punctului C faţă de dreapta AB este punctul:

$\boxed{\text{A}}$ $(-1,-1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(0,-1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0,0)$; $\boxed{\text{D}}$ $(-1,0)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(1,1)$.

7. (3p) Dacă $BC = 13$, $AB = 5$ şi $AC = 12$, atunci raza cercului înscris în triunghiul ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. (3p) Relativ la baza ortonormaă $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ a reperului cartezian xOy, se consideră vectorii $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = m\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari, atunci m se află în mulţimea:

A $\{-1\}$; B $\{-1, 0, 1\}$; C $\{1\}$; D $\{0\}$; E $\{-1, 1\}$.

9. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = \sin x$, care aparţin intervalului $[0, \pi]$, sunt:

A $0, \frac{\pi}{3}, \pi$; B $0, \frac{\pi}{2}, \pi$; C $0, \frac{\pi}{6}, \pi$; D $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ π;
E $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

Problemele **10.**, **11.**, **12.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1\,.$$

10. (3p) Derivata $f'(0)$ este:

A 1; B 0; C $\ln 2$; D $\ln \frac{1}{2}$; E -1.

11. (3p) Imaginea funcţiei f este:

A $\mathbb{R}$; B $(0, +\infty)$; C $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; D $[0, +\infty)$; E $[-1, +\infty)$.

12. (3p) Integrala $\int_0^1 x f(x)\, \mathrm{d}x$ este egală cu:

A $\frac{2\mathrm{e}}{3}$; B $2\mathrm{e} - 1$; C $\frac{2\mathrm{e} - 5}{4}$; D $\frac{2\mathrm{e} - 3}{4}$; E $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Problemele **13.**, **14.**, **15.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}\,.$$

13. (3p) Derivata $f'(x)$, pentru orice $x \neq 1$, este:

A $\frac{1}{(x-1)^2}$; B $\frac{2}{(x-1)^2}$; C $\frac{1}{x-1}$; D $\frac{-2}{(x-1)^2}$; E $\frac{x}{x-1}$.

14. (3p) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 0 este:

A $2x + y - 1 = 0$; B $2x + y = 0$; C $2x + y + 1 = 0$;
D $-2x + y + 1 = 0$; E $x + y + 1 = 0$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $2-\ln 2$.

Problemele **16.**, **17.**, **18.** se referă la legea de compoziţie asociativă

$$x\circ y = xy + x + y\,,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\,.$$

16. (3p) Elementul neutru ale legii „$\circ$" este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 0.

17. (3p) Numărul $(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\cdots\circ 2023$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 2023; $\boxed{\text{E}}$ 1.

18. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ x\circ x = x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-2,-1,0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1,1\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{-2,0\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,0\}$.

Problemele **19.**, **20.** se referă la polinomul $f = X^3 - X^2 + 5X + 2$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

19. (3p) Valoarea numărului $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 11; $\boxed{\text{B}}$ 9; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -9; $\boxed{\text{E}}$ 10.

20. (3p) Valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 14; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 5; $\boxed{\text{E}}$ 3.

Problemele **21.**, **22.**, **23.** se referă la funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^n e^x$, pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, fixat arbitrar.

21. (3p) Pentru orice $n\geq 2$, punctele critice ale lui f sunt în număr de:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ n; $\boxed{\text{E}}$ $n-1$.

22. (3p) Pentru $n = 2$, funcţia f este strict descrescătoare pe:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,-2)$; $\boxed{\text{B}}$ $(-2,+\infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{D}}$ $(-2,0)$; $\boxed{\text{E}}$ $(0,+\infty)$.

23. (3p) Pentru orice $n \geq 1$, valoarea integralei $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^n} \mathrm{d}x$ este:

A e; B 1; C $\mathrm{e}-1$; D $2\mathrm{e}+1$; E $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Problemele **24.**, **25.**, **26.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

24. (3p) Derivata $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este:

A $-\frac{2}{1+x^2}$; B 0; C $\frac{1}{1+x^2}$; D $\frac{2}{1+x^2}$; E 1.

25. (3p) Valorile funcţiei în punctele $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$ sunt:

A $f(-1) = -\pi$, $f(1) = \pi$; B $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$;
C $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$; D $f(-1) = 0$, $f(1) = \pi$;
E $f(-1) = f(1) = \pi$.

26. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \sin f(x) \mathrm{d}x$ este:

A 1; B $\frac{\pi}{2}$; C 0; D $\frac{\pi}{4}$; E -1.

Problemele **27.**, **28.**, **29.** se referă la matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

27. (3p) Valoarea determinantului matricei A este:

A -2; B 1; C 2; D -1; E 3.

28. (3p) Inversa matricei A este:

A $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

C $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

E $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

29. (3p) Soluţia unică a sistemului liniar $\begin{cases} x+z &= 1 \\ x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \end{cases}$ este:

A $(1,-1,-1)$; B $(-1,1,-1)$; C $(1,1,-1)$;
D $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; E $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

30. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Atunci ecuaţia $f(x)=m$ are cel mult o rădăcină reală dacă şi numai dacă parametrul real m se află în:

A $(-\infty,\mathrm{e})$; B $(-\infty,\mathrm{e}]$; C $(\mathrm{e},+\infty)$; D $[\mathrm{e},+\infty)$; E $(0,\mathrm{e})$.

Varianta 10

1. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x+1} = \sqrt{2x-1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,0,1\}$.

2. (3p) Se consideră progresia geometrică 1, 2, 4, 8, 16, ... Al nouălea termen al său este:

$\boxed{\text{A}}$ 64; $\boxed{\text{B}}$ 256; $\boxed{\text{C}}$ 1024; $\boxed{\text{D}}$ 32; $\boxed{\text{E}}$ 128.

3. (3p) Modulul numărului complex $z = \dfrac{2022-2023i}{2023+2022i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

4. (3p) Suma $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 9C_n^2 + 27C_n^3 + \cdots + 3^n C_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 2^n; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ n; $\boxed{\text{D}}$ 3^n; $\boxed{\text{E}}$ 4^n.

5. (3p) Soluţia ecuaţiei $\ln(x^2+1) = \ln x + \ln 2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ 9; $\boxed{\text{E}}$ 3.

6. (3p) Relativ la reperul cartezian ortonormat xOy, se consideră punctele $A(2,0)$, $B(0,2)$ şi $C(2,2)$. Simetricul punctului C faţă de dreapta AB este punctul:

$\boxed{\text{A}}$ $(1,1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(1,-1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0,0)$; $\boxed{\text{D}}$ $(-1,-1)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(-1,1)$.

7. (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului circumscris triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. (3p) Relativ la baza ortonormaă $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ a reperului cartezian ortonormat xOy, se consideră vectorii $\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali, atunci m se află în mulţimea:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-1, 1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1, 0, 1\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\{0\}$.

9. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = \sin x$, care aparţin intervalului $[0, 2\pi]$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$; $\boxed{\text{B}}$ $0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3},\ 2\pi$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $0,\ \frac{\pi}{3},\ 2\pi$;
$\boxed{\text{E}}$ $0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ 2\pi$.

10. (3p) Derivata funcţiei $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ în punctul $x_0 = 0$, $f'(0)$, este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

11. (3p) Limita $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ 0.

12. (3p) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ în punctul de abscisă 0 este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = x + 1$; $\boxed{\text{B}}$ $y = \mathrm{e}x - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = -x$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = x$; $\boxed{\text{E}}$ $y = 1$.

13. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $1 + \ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $1 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 3$.

14. (3p) Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + mx - 2 = 0$, cu $m \in \mathbb{R}$, atunci avem:

$\boxed{\text{A}}$ $x_1 > x_2 > 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x_1 < 0 < x_2$; $\boxed{\text{C}}$ $x_1 < x_2 < 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $x_1 \le x_2 \le 0$; $\boxed{\text{E}}$ $x_1 = x_2 = 0$.

15. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \int_0^a \left(e^x - e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

16. (3p) Elementul neutru al legii de compoziţie

$$x * y = xy + |xy| - |x| - |y| + 1 \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 3.

17. (3p) Dacă $x * y = xy + |xy| - |x| - |y| + 1$ este o lege de compoziţie pe $\mathbb{R}$, atunci mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x * x = x^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1, 0, 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1, 1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{0\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\{-1\}$.

18. (3p) Suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 + X + 2023$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 2023.

Problemele **19.**, **20.** se referă la funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n e^{-x}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, fixat arbitrar.

19. (3p) Pentru orice $n \geq 2$, punctele critice ale lui f sunt în număr de:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ $n - 1$; $\boxed{\text{E}}$ n.

20. (3p) Pentru orice $n \geq 1$, valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^n} \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$; $\boxed{\text{D}}$ $2\mathrm{e} + 1$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

21. (3p) Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

22. **(3p)** Soluţia unică a sistemului liniar $\begin{cases} x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \\ x+z &= 1 \end{cases}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(1,-1,-1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(-1,1,-1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(1,1,-1)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

23. **(3p)** Domeniul de derivabilitate al funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} & \text{dacă} \quad x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad x=0 \end{cases} \quad \text{este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$;
$\boxed{\text{E}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

24. **(3p)** Dacă $a>0$, atunci valoarea integralei

$$\int_a^{a+1}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

25. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Atunci ecuaţia $f(x)=m$ are două rădăcini reale dacă şi numai dacă parametrul real m se află în:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,\mathrm{e})$; $\boxed{\text{B}}$ $(-\infty,\mathrm{e}]$; $\boxed{\text{C}}$ $(\mathrm{e},+\infty)$; $\boxed{\text{D}}$ $[\mathrm{e},+\infty)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(0,\mathrm{e})$.

26. **(3p)** Dacă se consideră polinomul $f=X^3-X^2+5X+2$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, atunci valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 14; $\boxed{\text{C}}$ -35; $\boxed{\text{D}}$ 5; $\boxed{\text{E}}$ 3.

27. (3p) Valoarea determinantului matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -1.

28. (3p) Valoarea integralei $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

29. (3p) Numărul de asimptote ale graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 4.

30. (3p) Dacă $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$, unde $a, b > 0$, atunci produsul ab este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{4}$.

Varianta 11

1. (3p) Calculaţi $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 10.

2. (3p) Calculaţi $(1+i)^{2022}+(1-i)^{2022}$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ i; $\boxed{\text{D}}$ $-i$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

3. (3p) Câţi termeni raţionali are dezvoltarea $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{100}$.

$\boxed{\text{A}}$ 100; $\boxed{\text{B}}$ 16; $\boxed{\text{C}}$ 17; $\boxed{\text{D}}$ 9; $\boxed{\text{E}}$ 25.

4. (3p) Fie ecuaţia $(m-2)x^2+(2m+1)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia să aibă două soluţii de semne contrare.

$\boxed{\text{A}}$ m real; $\boxed{\text{B}}$ $m\in(0,2)$; $\boxed{\text{C}}$ $m=2$; $\boxed{\text{D}}$ $m=3$; $\boxed{\text{E}}$ $m\in(-1,2)$.

5. (3p) Determinaţi numărul real x pentru care numerele $2, x^2+3x, 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

$\boxed{\text{A}}$ -4; $\boxed{\text{B}}$ $-4, 1$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 17; $\boxed{\text{E}}$ 1.

6. (3p) Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u}=-3\overrightarrow{i}+(a-2)\overrightarrow{j}$ si $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$ sunt coliniari.

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 10; $\boxed{\text{C}}$ 14; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

7. (3p) Să se calculeze

$$S=\cos 0^\circ+\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cdots+\cos 170^\circ+\cos 180^\circ.$$

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $-\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

8. (3p) Aflaţi numărul x natural astfel încât $2+5+8+\cdots+x=155$.

$\boxed{\text{A}}$ 16; $\boxed{\text{B}}$ 25; $\boxed{\text{C}}$ 31; $\boxed{\text{D}}$ 29; $\boxed{\text{E}}$ 39.

9. (3p) Determinaţi numărul x real astfel încât aria trunghiului ABO este 3, ştiind că $A(x,1)$, $B(2x,-1)$, $O(0,0)$.

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ ± 2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{3}$.

10. (3p) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-1}=5-2x$.

A 2; B $2, \frac{13}{4}$; C $\frac{13}{4}$; D 1; E 10.

11. **(3p)** Să se determine unghiul dreptelor $d_1 : y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ şi $d_2 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

A $90°$; B $0°$; C $30°$; D $120°$; E $60°$.

Fie polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbb{Q}$.

12. **(3p)** Să se determine a, b ştiind că $1 - i$ este rădăcină a lui f.

A $a = 12, b = 0$; B $a = -4, b = 6$; C $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$; D $a = 0, b \in \mathbb{R}$; E $a = 0, b = 12$.

13. **(3p)** Să se determine celelalte rădăcini ale lui f, ştiind că $1 + \sqrt{2}$ e una din rădăcini.

A 4; B 12; C -1; D -12; E -3.

14. **(3p)** Să se determine a, b, ştiind că f are o rădăcină triplă.

A $a = b = 1$; B $a = 2, b = -1$; C $a = 0, b = 12$; D $a = 4, b = 10$; E $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{27}$.

Fie e baza logaritmului natural. Pe intervalul $(0, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie:

$$x * y = x^{2 \ln y}.$$

15. **(3p)** Să se determine elementul neutru.

A e; B 1; C $\sqrt{e}$; D e^2; E $\ln 3$.

16. **(3p)** Pentru $x \neq 1$ simetricul lui x în raport cu legea $*$ este:

A 0; B $-e^2$; C $-\ln 3$; D $e^{\frac{1}{4 \ln x}}$; E $-\sqrt{e}$.

17. **(3p)** Fie $n \geq 2$. Numărul $e_n = e * e * \cdots * e$, unde e apare de n ori este:

A $e^{2^{n-1}}$; B $e^{2(n-1)}$; C 1; D $\frac{1}{e^{2n}}$; E e^n.

Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + x^2 - 2$.

18. (3p) f este strict crescătoare pe (intervalul maximal)

$\boxed{\text{A}}$ $[0, 1/e]$; $\boxed{\text{B}}$ $[0, 1]$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty, 1/2]$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ $(0, \infty)$.

19. (3p) Rădăcinile reale ale funcţiei f pe $(0, 1)$ sunt în număr de:

$\boxed{\text{A}}$ două ; $\boxed{\text{B}}$ nici una; $\boxed{\text{C}}$ una ; $\boxed{\text{D}}$ trei; $\boxed{\text{E}}$ patru.

20. (3p) Derivata de ordinul $n \geq 3$ a funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $2^n e^{2x}$; $\boxed{\text{B}}$ ne^{2x}; $\boxed{\text{C}}$ e^{2nx}; $\boxed{\text{D}}$ $2^n e^{2^n x}$; $\boxed{\text{E}}$ $2n^n e^{2x}$.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 - 5x$.

21. (3p) Punctele de extrem ale funcţiei f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ± 1; $\boxed{\text{D}}$ nu are; $\boxed{\text{E}}$ 0.

22. (3p) f este concavă pe mulţimea:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $(-\infty, 0)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0, \infty)$; $\boxed{\text{D}}$ $(0, 1)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(1, \infty)$.

23. (3p) f are următoarele puncte de inflexiune:

$\boxed{\text{A}}$ $(0, 0)$; $\boxed{\text{B}}$ $(1, -4)$; $\boxed{\text{C}}$ $(1, -4)$ şi $(-1, 4)$; $\boxed{\text{D}}$ $(-1, 4)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(1, 0)$.

24. (3p) Avem inegalitatea $f(x) \geq -4$ pe mulţimea:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ $(-\infty, 0)$; $\boxed{\text{C}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{D}}$ $(-1, 0)$; $\boxed{\text{E}}$ $(0, \infty)$.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

25. (3p) Mulţimea (maximală) pe care $f \geq 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $[0, \infty)$ $\boxed{\text{B}}$ $(0, 1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0, \pi/4)$; $\boxed{\text{D}}$ $(0, e)$; $\boxed{\text{E}}$ $[-1, \infty)$.

26. (3p) Aria suprafeţei plane determinate de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \ln 2$.

27. (3p) Mulţimea (maximală) pe care f este bijectivă este:

$\boxed{A}$ $(0, 1)$; $\boxed{B}$ $(0, \infty)$; $\boxed{C}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{D}$ $(-\infty, -1)$; $\boxed{E}$ $(-1, -1)$.

28. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{1-\frac{\pi}{4}} f^{-1}(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ $-\dfrac{\pi}{4}$; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ $1 - \dfrac{\pi}{4}$; $\boxed{E}$ -1.

29. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin(\sin x)}{x}$ este:

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ ∞; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ π; $\boxed{E}$ $\dfrac{\pi}{2}$.

30. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(ax^2 + bx + c)}{x^2 - 1}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b + c = \pi$ este:

$\boxed{A}$ $a + b$; $\boxed{B}$ ∞; $\boxed{C}$ -1; $\boxed{D}$ $\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{E}$ $-\dfrac{2a + b}{2}$.

Varianta 12

1. (3p) Forma simplificată a expresiei $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n-1)!}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $n^2 + 2n$; $\boxed{\text{B}}$ $n!$; $\boxed{\text{C}}$ $n - 1$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ n^2.

2. (3p) Rezolvaţi inecuaţia $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8) \geq 0$.

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $[2\sqrt{2}, 3]$; $\boxed{\text{C}}$ $[3, \infty)$; $\boxed{\text{D}}$ $[-\infty, 3)$;
$\boxed{\text{E}}$ $[-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3]$.

3. (3p) Să se calculeze $C_{2023}^{2} - C_{2023}^{2021}$.

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2023!; $\boxed{\text{D}}$ 2021!; $\boxed{\text{E}}$ 2.

4. (3p) Valoarea numărului $(\sqrt[3]{2})^{(\log_2 8)}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 8; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 3.

5. (3p) Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (m^2 + 3)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 7$.

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ $-\sqrt{3}$; $\boxed{\text{E}}$ ± 1.

6. (3p) Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC ştiind că $BC = \sqrt{2}$, $m(\measuredangle BAC) = 30°$, $m(\measuredangle ABC) = 45°$.

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 12; $\boxed{\text{D}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 10; $\boxed{\text{E}}$ 2.

7. (3p) Condiţia ca graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c, (\, a \neq 0, a, b, c$ reale) să nu taie axa Ox este:

$\boxed{\text{A}}$ $\Delta < 0$; $\boxed{\text{B}}$ $\Delta = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $\Delta \leq 0$; $\boxed{\text{D}}$ $\Delta \geq 0$;
$\boxed{\text{E}}$ $\Delta > 0$.

8. (3p) Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1 = 6$ şi $a_2 = 5$. Să se calculeze a_7.

$\boxed{\text{A}}$ 7; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ 12; $\boxed{\text{E}}$ 15.

9. (3p) Rezolvaţi inecuaţia $\dfrac{|\, x - 3 \,|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$.

A 4; B $\emptyset$; C $[4, \infty)$; D $(-\infty, 4]$; E $[3/2, 2)$.

10. (3p) Coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC unde $A(3,0), B(2,2)$ şi $C(-1,-2)$ sunt date de punctul:

A $(-1/2, 0)$; B $(-1/2, 1/2)$; C $(1/2, 0)$; D $(-1, 0)$; E $(-1, -1)$.

11. (3p) Să se calculeze $\cos x$, ştiind că $\sin x = \frac{4}{5}$ şi că x este măsura unui unghi ascuţit.

A $\frac{1}{3}$; B $\frac{-1}{2}$; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{3}{5}$; E $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. (3p) Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, $\cos^2 B + \cos^2 C$ are valoarea:

A π; B 1; C $\pi/2$; D $\sin^2 A$; E 2π.

Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

13. (3p) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x = 11$.

A 1; B 5; C $1, 5$; D -1; E -5.

14. (3p) Calculaţi (ştiind că operaţia "$\circ$" e asociativă) $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \cdots \circ \sqrt{2023}$.

A 0; B 2023; C 1; D 3; E $\sqrt{2023}$.

Se consideră polinomul $P(x) = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4.

15. (3p) Să se determine m şi n ştiind că P admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

A $m = -1, n = 0$; B $m = 0, n = -1$; C $m = 1, n = -1$; D $m = n = 1$; E $m = n = 1$.

16. (3p) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului P să verifice $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

A 0; B -1; C 2; D 1; E -2.

17. (3p) Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculaţi A_α^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

A $\begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} (\cos\alpha)^n & (\sin\alpha)^n \\ -(\sin\alpha)^n & (\cos\alpha)^n \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} n\cos\alpha & n\sin\alpha \\ -n\sin\alpha & n\cos\alpha \end{pmatrix}$.

18. (3p) Folosind exerciţiul anterior calculaţi limita fiecărui element al lui B^n pentru $n \to \infty$, unde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

A -1; B ∞; C $-\infty$; D 0; E 1.

Se consideră funcţia $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} + x$.

19. (3p) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e \left(g(x) - \frac{\ln x}{x}\right)dx$.

A $e^2 - 1$; B e^2; C $\dfrac{e^2-1}{2}$; D $\dfrac{e^2}{2}$; E 1.

20. (3p) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e g(x)dx$.

A 0; B e; C $\dfrac{e^2}{2}$; D 1; E e^2.

21. (3p) Arătaţi că şirul cu termenul general

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (g(x) - x)dx,\ n \geq 1$$

este o progresie aritmetică şi determinaţi raţia r.

A $r = 1$; B $r = e$; C $r = -1$; D $r = n$; E $r = e^n$.

22. (3p) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

A $-\infty$; B ∞; C 0; D 1; E e.

Se consideră funcţia $h(x) : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$.

23. (3p) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e h'(x)dx$.

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ e; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ $\dfrac{1-2e}{2e}$; $\boxed{E}$ $1 - 2e$.

24. (3p) Determinaţi intervalul maximal pe care orice primitivă a lui h este crescătoare.

$\boxed{A}$ $\emptyset$; $\boxed{B}$ $[e, \infty)$; $\boxed{C}$ $[e, e^2]$; $\boxed{D}$ $[e^2, \infty)$; $\boxed{E}$ $[1, \infty)$.

25. (3p) Determinaţi numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încât aria suprafeţei delimitate de graficul lui h, axa Ox, dreapta de ecuaţie $x = a$ si $x = e^2$ să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

$\boxed{A}$ e; $\boxed{B}$ 2; $\boxed{C}$ $3/2$; $\boxed{D}$ $e + 1$; $\boxed{E}$ $e^2 - 1$.

Se consideră funcţia $\varphi(x) : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x + 1)\,.$$

26. (3p) Calculaţi $\varphi'(x)$

$\boxed{A}$ $\dfrac{6x^3}{x+1}$; $\boxed{B}$ $\dfrac{6x^2}{x+1}$; $\boxed{C}$ $6x^2 - 6x + 6$; $\boxed{D}$ $\dfrac{1}{x+1}$;
$\boxed{E}$ $6\ln(x + 1)$.

27. (3p) Valoarea minimă a funcţiei φ este:

$\boxed{A}$ -1; $\boxed{B}$ e; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ $-6\ln 2$; $\boxed{E}$ 0.

28. (3p) Calculaţi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{x}$.

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ ∞; $\boxed{D}$ $-\infty$; $\boxed{E}$ e.

29. (3p) Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Determinaţi a şi b astfel încât $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{A}$ $a = -b$; $\boxed{B}$ $a = 1, b = 0$; $\boxed{C}$ $a = b = 1$;
$\boxed{D}$ $a = 2, b = -1$; $\boxed{E}$ $a = 0, b = 1$.

30. (3p) Valoarea limitei $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{E}}$ e.

Varianta 13

1. (3p) Fie $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculaţi suma $|z| + |\bar{z}|$.

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ i; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $-i$; $\boxed{\text{E}}$ 10.

2. (3p) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{-8x} = 2$.

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ -8; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt[3]{3}$; $\boxed{\text{E}}$ 3.

3. (3p) Distanţa de la punctul $A(1,1)$ la dreapta BC, unde $B(2,3)$ şi $C(-1,5)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 13; $\boxed{\text{C}}$ 8; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{8}{\sqrt{13}}$; $\boxed{\text{E}}$ 5.

4. (3p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ unde $a_1 = 1$ şi $a_5 = 13$. Atunci termenul a_{2023} este:

$\boxed{\text{A}}$ 1005; $\boxed{\text{B}}$ 150; $\boxed{\text{C}}$ 6067; $\boxed{\text{D}}$ 2000; $\boxed{\text{E}}$ 6025.

5. (3p) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ şi $g(x) = -x - 4$. Câte puncte comune au graficele celor două funcţii?

$\boxed{\text{A}}$ nici unul; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

6. (3p) Lungimea razei cercului circumscris unui triunghi cu laturile 5, 6 şi 7 este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{35\sqrt{6}}{24}$; $\boxed{\text{D}}$ 11; $\boxed{\text{D}}$ 17.

7. (3p) În mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{x+2023} = 0,04$ are soluţiile:

$\boxed{\text{A}}$ -4; $\boxed{\text{B}}$ 100; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ -2024; $\boxed{\text{E}}$ 0.

8. (3p) Fie ecuaţia $(m-2)x^2 + (2m+1)x + m = 0$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia să aibă două soluţii de semne contrare.

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ $(0,2)$; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ 11.

9. (3p) Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = a\vec{i} + 2\vec{j}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât măsura unghiului dintre cei doi vectori să fie de 30°.

A 1; B 5; C 7; D 16; E $16+10\sqrt{3}$.

10. (3p) Să se calculeze $\sin^2 80° + \sin^2 10°$.

A 1; B π; C π^2; D 0; E $\frac{\pi}{2}$.

11. (3p) Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$. Calculaţi determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}.$$

A 1; B $\omega^2+\omega$; C 2; D 0; E ω^2.

Se consideră polinomul $P(x) = X^3 - 2mX + m + 1, m \in \mathbb{R}$.

12. (3p) Determinaţi m astfel încât P să se dividă cu $X-1$.

A 1; B 2; C 0; D -1; E 10.

13. (3p) Pentru $m=2$ calculaţi $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui P.

A 0; B 2; C -10; D 5; E i.

14. (3p) Determinaţi m astfel încât restul împărţirii polinomului P la $X+1$ să fie egal cu 1.

A 1; B 2; C $\frac{1}{3}$; D -5; E 10.

Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}.$$

15. (3p) Calculaţi A^2.

A p^2A; B p^2I_3; C $3pA$; D p^2A^2; E pA.

16. (3p) Calculaţi $\det(A-I_3)\det(A+I_3)$.

A $9p^2-1$; B p^2; C p; D 1; E 0.

17. (3p) Calculaţi $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

A $p^{n-1}I_3$; B p^nI_3; C np^nI_3; D $(3p)^{n-1}A$; E 3^nA.

18. (3p) Determinaţi domeniul de continuitate al funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ unde

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+xe^{nx}}{1+e^{nx}}.$$

A $\{0\}$; B $\emptyset$; C $(0,1)$; D $(0,\infty)$; E $\mathbb{R}$.

19. (3p) Determinaţi a real pentru care graficul lui $f(x)=\dfrac{1}{x^2+ax+1}$, $f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiţie admite o singură asimptotă.

A $a=2$; B $a=-2$; C $a>0$; D $a\in(-2,2)$; E $a\in(-2,\infty)$.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+2x-1, & x\geq 0\\ 2x-1, & x<0.\end{cases}$$

20. (3p) Determinaţi domeniul maximal pe care f admite primitive.

A $(-1,1)$; B $(-2,2)$; C $\mathbb{R}$; D $(-\infty,0]$; E $a\in(0,\infty)$.

21. (3p) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

A 0; B -1; C -2; D 5; E 11.

22. (3p) Aflaţi $a\in[0,2]$ astfel încât aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=a, x=2$ să fie 9.

A 1; B -1; C 2; D $\frac{1}{2}$; E $\frac{1}{5}$.

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}, I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$.

23. (3p) Să se calculeze I_0.

A 1; B $\frac{\pi}{4}$; C 0; D $\frac{\pi}{2}$; E 2.

24. (3p) Stabiliţi care din următoarele inegalităţi este adevărată, $\forall n \geq 2$:

A $I_n < 0$; B $I_n \leq 0$; C $I_n < \dfrac{1}{n^n}$;
D $I_n < \dfrac{1}{2n^n}$; E $I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.

25. (3p) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n - \dfrac{1}{3}\right)$.

A ∞; B 0; C $\dfrac{1}{6}$; D 1; E 6.

Se consideră funcţia $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2)$.

26. (3p) Să se calculeze $f'(x)$.

A $\dfrac{1}{(x-4)^2}$; B 0; C $\dfrac{4}{x^2-4}$; D $\dfrac{-4}{x^2-4}$; E $\dfrac{4}{x^2-4}$.

27. (3p) Asimptotele lui f sunt:

A $x = 0$; B $x = 2$; C $x = 2$ şi $y = 0$;
D $y = 2$; E nu are.

28. (3p) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

A 2; B 4; C ∞; D 0; E -4.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n}.$$

29. (3p) Asimptotele lui f sunt în număr de:

A 1; B n; C $n+1$; D $n-1$; E 2.

30. (3p) Numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$ este:

A $n-1$; B n; C $n+1$; D 1; E nu are.

Varianta 14

1. (3p) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 - \sqrt{2-x} = x$.

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ 1, 2; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 3; $\boxed{E}$ nu are soluţii.

2. (3p) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\log_2(x+2) - \log_5(x-5) = 3.$$

$\boxed{A}$ 6; $\boxed{B}$ 1, 6; $\boxed{C}$ -2; $\boxed{D}$ 5; $\boxed{E}$ nu are soluţii.

3. (3p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, ştiind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ şi $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.

$\boxed{A}$ 2; $\boxed{B}$ ± 4; $\boxed{C}$ -2; $\boxed{D}$ 5; $\boxed{E}$ -4.

4. (3p) Să se calculeze $\sin^2(130°) + \cos^2(50°)$.

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ π; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{E}$ 2π.

5. (3p) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB = 3$ şi $m(\measuredangle C) = 30°$.

$\boxed{A}$ 3; $\boxed{B}$ π; $\boxed{C}$ 5; $\boxed{D}$ 2; $\boxed{E}$ 2π.

6. (3p) Să se determine valorile lui x, ştiind că $\lg\sqrt{x}, \frac{3}{2}, \lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

$\boxed{A}$ 2; $\boxed{B}$ 5; $\boxed{C}$ -1; $\boxed{D}$ 100; $\boxed{E}$ 20.

7. (3p) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x-2} = \frac{1}{3}^{\sqrt{x}}$.

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ $-1, 4$; $\boxed{C}$ -1; $\boxed{D}$ 1, 4; $\boxed{E}$ 1.

8. (3p) Pentru ce valori ale numărului real a ecuaţia

$$x^2 - 2x\sin a + 1 - \cos^2 a = 0$$

admite soluţii reale egale?

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ $a \in \mathbb{R}$; $\boxed{C}$ 2π; $\boxed{D}$ π; $\boxed{E}$ 1.

9. (3p) Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$\boxed{A}$ $-7, 8$; $\boxed{B}$ -7; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 8; $\boxed{E}$ 1.

10. (3p) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+5x+m+6$ satisface $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ $m=1$; $\boxed{\text{B}}$ $m=5$; $\boxed{\text{C}}$ $m\geq\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $m=2$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

Se consideră polinomul $f\in\mathbb{C}[X], f=(X+i)^{100}+(X-i)^{100}$, care are forma algebrică $f(X)=a_{100}X^{100}+a_{99}X^{99}+\cdots+a_0$.

11. (3p) Să se calculeze $a_{100}+a_{99}$.

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 100; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ i.

12. (3p) Să se determine restul împărţirii lui f la X^2-1.

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $X+1$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ -2^{51}; $\boxed{\text{E}}$ $iX+1$.

13. (3p) Rădăcinile reale ale lui f sunt în număr de:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 100; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 3.

Se consideră sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} ax+by+cz=a \\ bx+cy+az=b, \quad a,b,c\in\mathbb{R} \\ cx+ay+bz=c. \end{cases}$$

14. (3p) Calculaţi determinantul sistemului.

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ abc; $\boxed{\text{C}}$ $(abc)^{-1}$; $\boxed{\text{D}}$ 1;
$\boxed{\text{E}}$ $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$.

15. (3p) Rezolvaţi sistemul în cazul în care e compatibil determinat.

$\boxed{\text{A}}$ $x=a, y=0, z=0$; $\boxed{\text{B}}$ $x=y=0, z=a$; $\boxed{\text{C}}$ $x=y=z=1$;
$\boxed{\text{D}}$ $x=1, y=z=0$; $\boxed{\text{E}}$ $x=y=0, z=1$.

16. (3p) Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ si $x^2+y^2+xy=0$ câte soluţii are sistemul ?

$\boxed{\text{A}}$ soluţie unică; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ nici una; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

17. (3p) Se dă polinomul cu coeficienţi reali $f=X^4+aX^3+bX+c$. Să se determine a,b,c ştiind că $f(0)=f(1)$ şi una din rădăcini este $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\text{A}}$ $a = 0, b = 0, c = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a = c = -2, b = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $a = b = c = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $a = 2, b = c = 1$; $\boxed{\text{E}}$ $a = b = 1, c = 0$.

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - 6x + c}$, unde D este domeniul maxim de definiţie şi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

18. (3p) Să se determine a, b, c astfel încât drepta de ecuaţie $x = 2$ să fie asimptotă şi graficul să fie tangent axei Ox în punctul de abscisă $x = 1$.

$\boxed{\text{A}}$ $a = b = c = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a = b = -2, c = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = b = c = 3$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 2, b = 1, c = 3$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -2, b = 1, c = 8$.

19. (3p) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei f pentru $x \in [-2, 1] \cup [5/2, 3]$ şi axa Ox.

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{3}{2}\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{2}\ln\dfrac{3}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{2}\ln\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2}\ln 2$;
$\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

20. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + ax^2 - 4}$. Determinaţi a real pentru care tangenta în punctul $A(1, f(1))$ la graficul funcţiei este perpendiculară pe axa absciselor.

$\boxed{\text{A}}$ $a = 3$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 10$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -5$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1, a \in \mathbb{R}$.

21. (3p) Să se determine parametrul real a astfel încât $f'(1) - 12 = 0$.

$\boxed{\text{A}}$ $a = 12$; $\boxed{\text{B}}$ $a = -1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 3$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -10$.

22. (3p) Pentru valoarea lui a determinată la exerciţiul de mai sus, să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{f'(x)} dx$.

$\boxed{\text{A}}$ $I = e$; $\boxed{\text{B}}$ $I = -10$; $\boxed{\text{C}}$ $I = \dfrac{9}{2}$;
$\boxed{\text{D}}$ $I = 3$; $\boxed{\text{E}}$ $I = \ln 6$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţia $f_n(x) = (1 - x)^n$.

23. (3p) Să se calculeze aria subgraficului lui f_n.

A $A_n = 1$; B $A_n = \dfrac{1}{n+1}$; C $A_n = \dfrac{1}{n}$;
D $A_n = n$; E $A_n = \dfrac{1}{n^2}$.

24. (3p) Să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_0^1 x f_n(x)dx$.

A $I_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; B $I_n = \dfrac{1}{n+1}$; C $I_n = \dfrac{1}{n+2}$;
D $I_n = n^2$; E $I_n = \dfrac{n}{n+1}$.

25. (3p) Să se calculeze $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

A $L = e$; B $L = 1$; C $L = 1 - e$;
D $L = \infty$; E $L = \dfrac{1}{e}$.

26. (3p) Să se determine constantele reale a, b astfel ca

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0.$$

A $a = b = 0$; B $a = -2, b = 1$; C $a = 2, b = 1$;
D $a = 1, b = -1$; E $a = b = 1$.

27. (3p) Funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2023^n}{2023^n + x^n}, n \in \mathbb{N}$ este discontinuă în punctele:

A $x = 2023$; B $x = 0$; C nu are puncte de discontinuitate
D $x = 1$; E $x = n, n \in \mathbb{N}$.

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2023}{x}\right)$, unde D este domeniul maxim de definiţie.

28. (3p) Să se determine D.

A $(0, 1)$; B $\emptyset$; C $(-\infty, -2023) \cup (0, \infty)$;
D $(0, \infty)$; E $\mathbb{R}$.

29. (3p) Calculaţi $f'(x)$.

A $-\frac{2023}{x^2+2023}$; B $-\frac{2023}{x^2+2023x}$; C $\frac{2023}{x^2+2023x}$;
D $\frac{-1}{x^2+2023x}$; E $\frac{-1}{x^2+2023}$.

30. (3p) Determinaţi asimptota la graficul lui f către $+\infty$.

A $y=0$; B $y=1$; C nu are asimptote; D $y=x+1$;
E $y=2023x+2023$.

Varianta 15

1. (3p) Soluţiile ecuaţiei $C_n^2 = C_n^1 + 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sunt:

A 0; B 4; C nu are soluţii; D 2; E 5.

2. (3p) Să se calculeze $\sin 10° - \cos 80°$.

A π; B 2π; C 0; D 1; E $\frac{1}{2}$.

3. (3p) Să se calculeze suma $S = 1 + 11 + 21 + \cdots + 111$.

A $S = 672$; B $S = 600$; C $S = 1011$; D $S = 1010$; E $S = 999$.

4. (3p) Soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{169 - x^2} = 12$ sunt:

A 5; B -5; C nu are soluţii; D ± 5; E 13.

5. (3p) Să se calculeze $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$.

A 3; B -1; C 8; D 1; E 2.

6. (3p) Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ şi care are panta egală cu 1.

A $y = -x$ B $y = x$; C $y = x - 1$; D $y = x + 1$; E $y = 1$.

7. (3p) Pentru ce valori ale lui m, parabola asociată funcţiei de gradul al doilea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1$, este situată deasupra axei Ox.

A $m = 1$ B $m > 0$; C $m < 0$; D $m \in \mathbb{R}$; E $m \geq -1$.

8. (3p) Raza cercului circumscris triunghiului ABC are lungimea 6 şi $AC = 6$. Să se calculeze măsura unghiului B.

A $m(\measuredangle B) = 30°$; B $m(\measuredangle B) = 60°$; C $m(\measuredangle B) = 90°$; D $m(\measuredangle B) = 45°$; E $m(\measuredangle B) = 15°$.

9. (3p) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, ştiind că soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică ecuaţia $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.

$\boxed{\text{A}}$ $m = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $m < 0$; $\boxed{\text{C}}$ $m > 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $m = 10$; $\boxed{\text{E}}$ $m = 2$.

10. (3p) Pentru ce valori ale lui x numerele $3^x - 1, 3^{x+1}$ şi $5 \cdot 3^x + 1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică?

$\boxed{\text{A}}$ $x = 10$; $\boxed{\text{B}}$ $x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $x < 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x > 1$;
$\boxed{\text{E}}$ $x = 0$.

11. (3p) Se consideră polinomul $f = mX^3 + X^2 + nX + p$, m, n, $p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Ştiind că împărţind pe rând polinomul f la $X - 1$ şi $X + 2$ se obţin respectiv resturile $r_1 = 4, r_2 = -5$ şi că f este divizibil cu $X + 1$, se cere să se determine coeficienţii m, n şi p.

$\boxed{\text{A}}$ $m = 1, n = 2, p = 4$; $\boxed{\text{B}}$ $m < 0, n = p = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $m = -1, n = 2, m = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $m = n = p = 1$;
$\boxed{\text{E}}$ $m = n = p = 2$.

Se dă polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 1, a, b \in \mathbb{R}$.

12. (3p) Determinaţi numerele a, b ştiind că polinomul f se divide prin $X^2 - 2X + 1$.

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1, b = 4$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 3, b = -4$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 2, b = 5$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = b = 15$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -1, b = -2$.

13. (3p) Pentru a, b determinaţi mai sus să se afle rădăcinile lui f.

$\boxed{\text{A}}$ $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = \pm i$; $\boxed{\text{B}}$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$;
$\boxed{\text{C}}$ $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = 1 \pm i$.

14. (3p) Să se determine valorile coeficienţilor a şi b, ştiind că ecuaţia $x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx + 225 = 0$ are două rădăcini raţionale duble.
$\boxed{\text{A}}$ $a = 94, b = -240$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 1, b = -1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = -1, b = 1$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = b = 19$; $\boxed{\text{E}}$ $a = 60, b = 77$.

15. (3p) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $*$:

$$x * y = xy + 2ax + by, \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă şi asociativă.

$\boxed{\text{A}}$ $a = 0, b = -1$; $\boxed{\text{B}}$ $a = b = 0$ sau $a = \dfrac{1}{2}, b = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 1, b = 2$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 0, b = 1$; $\boxed{\text{E}}$ $a = 3, b = 6$.

Se consideră matricele

$$A(n) = \begin{pmatrix} e^{\ln n} & \ln e \\ \ln 1 & \ln e \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$$

16. (3p) Calculaţi $\det(A^3(3))$.

$\boxed{\text{A}}$ 27; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 13; $\boxed{\text{E}}$ 5.

17. (3p) Determinaţi $A^{2023}(1)$.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 2023 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}(x^2 + a^2)^{-1}$, unde a este un parametru real nenul.

18. (3p) Să se calculeze derivata lui f.

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{e^{ax}}{(x^2 + a^2)^2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{ax^2}{x^2 + a^2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{ax^2}{(x^2 + a^2)^2}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{ax^2 e^{ax}}{(x^2 + a^2)^2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{e^{ax}(ax^2 - 2x + a^3)}{(x^2 + a^2)^2}$.

19. (3p) Dacă x_1, x_2 sunt cele două rădăcini ale derivatei, să se calculeze

$$L = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1 + x_1 x_2}{1 - x_1 x_2} \right)^{((x_1 + x_2)^2/4)}.$$

$\boxed{\text{A}}$ $L = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $L = e^2$; $\boxed{\text{C}}$ $L = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $L = e$; $\boxed{\text{E}}$ $L = \infty$.

20. (3p) Determinaţi o primitivă a funcţiei $g(x) = (x^2 + a^2) f(x) \sin x$.

A $\dfrac{e^{ax}\cos x}{1+a^2}$; B $\dfrac{e^{ax}\sin x}{1+a^2}$; C $\dfrac{e^{ax}(\sin x+\cos x)}{(1+a^2)^2}$;
D $\dfrac{e^{ax}(\sin x+\cos x)}{1+a^2}$; E $e^{ax}(\sin x+\cos x)$.

21. (3p) Să se calculeze limita $L=\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{n+a}+b\sqrt{n+b}+c\sqrt{n+c})$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ sunt astfel încât $a+b+c=0$.

A $L=0$; B $L=e$; C $L=1$;
D $L=\infty$; E $L=-\infty$.

22. (3p) Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiei

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^2+2023}{x^{2n}+x^2+2021},\ x\in\mathbb{R}.$$

A $\emptyset$; B ±1; C 1; D -1; E 0.

Se consideră funcţia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sin x}\cos x$.

23. (3p) Să se calculeze $f'(0)$

A -1; B 1; C e^3; D 4; E e.

24. (3p) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

A 0; B 1; C ∞; D 2; E $-\infty$.

25. (3p) Să se calculeze aria mulţimii plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=\pi$.

A e; B 10; C $2(e-1)$; D $e-1$ E π.

26. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c, x\le 0,\ b,c\in\mathbb{R}\\ e^{-2x},\ \ x>0.\end{cases}$$

Să se determine b şi c, astfel încât funcţia f să fie derivabilă în $x=0$.

A $b=0,c=-1$; B $b=c=1$; C $a=1,b=2$;
D $b=-2,c=1$; E $b=c=3$.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - e^{-x}$.

27. (3p) Să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx, n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{A}}$ $2 - \dfrac{n^2+2n+2}{e^n}$; $\boxed{\text{B}}$ $n - e^n$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{n^3}{3} - e^{-n}$;
$\boxed{\text{D}}$ $1 - e^n$; $\boxed{\text{E}}$ $n - e^{-n}$.

28. (3p) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ e^{-1} ; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{4x}$.

29. (3p) Să se calculeze aria mulţimii mărginită de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreapta de ecuaţie $x = a, a < 0$.

$\boxed{\text{A}}$ π; $\boxed{\text{B}}$ $e^{4a} + 1$; $\boxed{\text{C}}$ $e^{4a} + 10$; $\boxed{\text{D}}$ $e^{4a} + e^a$;
$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{e^{4a} - 4e^a + 3}{4}$.

30. (3p) Să se calculeze $\lim\limits_{a\to-\infty} S(a)$.

$\boxed{\text{A}}$ π; $\boxed{\text{B}}$ ∞ ; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

Varianta 16

1. (3p) Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Numărul submulţmilor cu 4 elemente ale mulţimii A care conţin elementul 0 este:

$\boxed{A}$ C_7^4; $\boxed{B}$ A_7^4; $\boxed{C}$ A_6^3; $\boxed{D}$ C_7^3; $\boxed{E}$ C_6^3.

2. (3p) Valoarea expresiei $\log_9 \sqrt[3]{3} + \log_8 \sqrt{2}$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{B}$ $\frac{1}{6}$; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{E}$ 1.

3. (3p) $(1 - i)^{16} =$

$\boxed{A}$ 256; $\boxed{B}$ 128; $\boxed{C}$ -128; $\boxed{D}$ $-128i$; $\boxed{E}$ $512i$.

4. (3p) Vectorii $\vec{u} = (m - 1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = (m + 1)\vec{i} - 2\vec{j}$, $m < 0$, sunt perpendiculari. Atunci $m =$

$\boxed{A}$ $-\sqrt{2}$; $\boxed{B}$ $\pm\sqrt{5}$; $\boxed{C}$ $-\sqrt{5}$; $\boxed{D}$ -1; $\boxed{E}$ ± 1.

5. (3p) Valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$, este:

$\boxed{A}$ $-\frac{12}{13}$; $\boxed{B}$ $-\frac{13}{12}$; $\boxed{C}$ $\frac{13}{12}$; $\boxed{D}$ $\frac{12}{13}$; $\boxed{E}$ $\frac{5}{6}$.

6. (3p) Dacă $\sin \alpha = \frac{1}{6}$, atunci $\cos(2\alpha) =$

$\boxed{A}$ $\frac{2}{6}$; $\boxed{B}$ $\frac{-1}{3}$; $\boxed{C}$ $\frac{1}{36}$; $\boxed{D}$ $\frac{1}{18}$; $\boxed{E}$ $\frac{17}{18}$.

7. (3p) Se dă următoarea sumă de termeni aflaţi în progresie aritmetică: $S_n = 7 + 3 - 1 - 5 - 9 - \cdots - x = -221$. Raţia acestei progresii aritmetice este:

$\boxed{A}$ 7; $\boxed{B}$ 4; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ -4; $\boxed{E}$ -2.

8. (3p) Se dă următoarea sumă de termeni aflaţi în progresie aritmetică: $S_n = 7 + 3 - 1 - 5 - 9 - \cdots - x = -221$. Numărul de termeni n al sumei S_n este:

$\boxed{A}$ 12; $\boxed{B}$ 13; $\boxed{C}$ 14; $\boxed{D}$ 11; $\boxed{E}$ 10.

9. (3p) Se dă următoarea sumă de termeni aflaţi în progresie aritmetică: $S_n = 7 + 3 - 1 - 5 - 9 - \cdots - x = -221$. Atunci $x =$

A 49; B -49; C 37; D -41; E 41.

10. (3p) Dacă $AB = 6$ şi $A(3, m)$, $B(-m, 3)$, atunci $m \in$

A $\{\pm 6\}$; B $\{\pm 9\}$; C $\{9\}$; D $\{6\}$; E $\{\pm 3\}$.

11. (3p) Dreapta suport a medianei duse din B a triunghiului ABC, unde $A(3, 2)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, -3)$, are ecuaţia:

A $7x+8y-3 = 0$; B $2x-5y+3 = 0$; C $-5x-9y+7 = 0$;
D $3x - 3y + 10 = 0$; E $-3x + 3y + 10 = 0$.

12. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_4(x+1)+\log_4(x-2) = 1$ este:

A $\{3\}$; B $\{-2\}$; C $\{3;-2\}$; D $\{-3\}$; E $\{2\}$.

13. (3p) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{x^2-25} =$

A 1; B 0; C 0.1; D 10;
E niciuna dintre variantele anterioare.

14. (3p) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x =$

A 0; B 1; C 10; D 0.1; E ∞.

15. (3p) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & m & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Rangul matricei A este 3 atunci când m ia valoarea:

A 3; B -3; C 2; D 1; E 0.

16. (3p) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & m & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Pentru $m = 1$ soluţia sistemului $AX = B$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{D}}$ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

17. (3p) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3. Produsul $(x_1 + a)(x_2 + a)(x_3 + a)$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ a^3; $\boxed{\text{C}}$ $3a$; $\boxed{\text{D}}$ $-3a$; $\boxed{\text{E}}$ $-a^3$.

18. (3p) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ a^3; $\boxed{\text{C}}$ $3a$; $\boxed{\text{D}}$ $-3a$; $\boxed{\text{E}}$ $-a^3$.

19. (3p) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi distincte două câte două, atunci x_1, x_2, x_3 aparţin mulţimii:

$\boxed{\text{A}}$ {a; a+1; a-1}; $\boxed{\text{B}}$ {1; -2; 3}; $\boxed{\text{C}}$ {a; a+4; a-1};
$\boxed{\text{D}}$ {-1; 2; 5}; $\boxed{\text{E}}$ {a-2; a; a+2}.

20. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2\cos x + 4$. Funcţia f

$\boxed{\text{A}}$ nu este monotonă; $\boxed{\text{B}}$ este strict crescătoare;
$\boxed{\text{C}}$ este descrescătoare; $\boxed{\text{D}}$ este pară; $\boxed{\text{E}}$ este impară.

21. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2\cos x + 4$. Derivata a doua $f''(x)$ este

$\boxed{\text{A}}$ $2\cos x$; $\boxed{\text{B}}$ $-2\cos x$; $\boxed{\text{C}}$ $2\sin x$; $\boxed{\text{D}}$ $-2\sin x$;
$\boxed{\text{E}}$ $3 + 2\cos x$.

22. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2\cos x + 4$. O primitivă a lui f este

$\boxed{\text{A}}$ $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\sin x + 4$; $\boxed{\text{B}}$ $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2\sin x + 4$;
$\boxed{\text{C}}$ $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\sin x + 4x + 5$; $\boxed{\text{D}}$ $F(x) = 3x^2 + 2\cos x$;
$\boxed{\text{E}}$ $F(x) = 3x^2 + 2\sin x$.

23. **(3p)** Fie $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)}$ şi $F\left(x\right)=a\ln(x-2)+b\ln(x^2+1)+c\operatorname{arctg}x$.

Atunci F este o primitivă a lui f pentru

A $a=\dfrac{1}{5}$, $b=\dfrac{1}{5}$, $c=\dfrac{1}{5}$; B $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{1}{5}$, $c=\dfrac{2}{5}$;
C $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{-1}{5}$, $c=\dfrac{2}{5}$; D $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{-1}{5}$, $c=\dfrac{1}{5}$;
E $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{-2}{5}$, $c=\dfrac{2}{5}$.

24. **(3p)** Fie $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)}$. Orice primitivă a lui f este:

A pozitivă pe $(2,\infty)$; B descrescătoare pe $(2,\infty)$;
C funcţie pară pe $(2,\infty)$; D funcţie impară pe $(2,\infty)$;
E crescătoare pe $(2,\infty)$.

25. **(3p)** Fie $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)}$. Atunci $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx=$

A $\dfrac{2}{5}\ln\left(\dfrac{40}{17}\right)-\dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{3}\right)$; B $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{40}{17}\right)+\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}4-\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}3$;
C $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{40}{17}\right)-\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}4+\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}3$;
D $\dfrac{2}{5}\ln\left(\dfrac{20}{17}\right)+\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}4-\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}3$;
E $\dfrac{2}{5}\ln\left(\dfrac{20}{17}\right)-\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}4+\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}3$.

26. **(3p)** Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^\star$ se consideră funcţia $f_n:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+1)^n$. Atunci $\displaystyle\int_{-1}^0 f_1(x)\,dx=$

A $\dfrac{1}{2}$; B 1; C $-\dfrac{1}{2}$; D 0; E $\dfrac{3}{2}$.

27. **(3p)** Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^\star$ se consideră funcţia $f_n:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+1)^n$. Atunci $\displaystyle\int_{-1}^0 xf_n(x)\,dx=$

A $\dfrac{1}{n+1}$; B $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; C $\dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$;
D $\dfrac{1}{n+2}$; E $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$.

28. (3p) $\lim\limits_{x\to\infty}(11^x-10^x)=$

A 0; B 1; C -1; D ∞; E $-\infty$.

29. (3p) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sin^9 x\,dx=$

A 9; B 0; C 1; D $\cos 9$; E $-\cos 9$.

30. (3p) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x\,dx=$

A 1; B 0; C $\dfrac{1}{20}$; D $\dfrac{5}{24}$; E $\dfrac{7}{12}$.

Varianta 17

1. (3p) $\left(\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i}\right)^2=$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{4}{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{4}{9}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{2}5$; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{4}{2}5$.

2. (3p) Vârful parabolei $y=x^2+3x+2$ este situat în:

$\boxed{\text{A}}$ C I; $\boxed{\text{B}}$ C II; $\boxed{\text{C}}$ C III; $\boxed{\text{D}}$ C IV; $\boxed{\text{E}}$ origine.

3. (3p) Fie mulţimea $A=\{0,2,4,6,8,10\}$. Numărul submulţimilor cu 3 elemente ale lui A care conţin un număr de 2 cifre este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ C_6^3; $\boxed{\text{E}}$ A_6^3.

4. (3p) Soluţia ecuaţiei $3x^2-2x+7=2x^2-3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1\pm 3i\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{2\pm 6i\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\{2\pm 9i\}}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{\pm 3i\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{\pm 3\}$.

5. (3p) $(1+i)^{12}$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ $1+i$; $\boxed{\text{B}}$ $1-12i$; $\boxed{\text{C}}$ 2^{12}; $\boxed{\text{D}}$ $2i$; $\boxed{\text{E}}$ -2^6.

6. (3p) Numerele 2, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{13}$ se ordonează descrescător astfel:

$\boxed{\text{A}}$ 2, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{13}$; $\boxed{\text{B}}$ 2, $\sqrt[4]{13}$, $\sqrt[3]{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt[3]{9}$, 2, $\sqrt[4]{13}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{13}$, 2; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt[4]{13}$, 2, $\sqrt[3]{9}$.

7. (3p) Soluţia ecuaţiei $25^x+5=6\cdot 5^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{\pm 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{\pm 2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{\pm 1,0\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1,0\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1,0\}$.

8. (3p) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$. Determinantul acestei matrice este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 6.

9. (3p) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$. Dacă $A^2=\alpha A$, $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci α este:

A 0; B 1; C 2; D 3; E 6.

10. (3p) Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z}, T, *)$, unde $xTy = x + y - 5$, iar $x * y = xy - 5x - 5y$. Elementul neutru al legii de compoziţie ,,T" este:

A -5; B 5; C 4; D 6; E -6.

11. (3p) Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z}, T, *)$, unde $xTy = x + y - 5$, iar $x * y = xy - 5x - 5y$. Elementul neutru al legii de compoziţie ,,$*$" este:

A -5; B 5; C 4; D 6; E -6.

12. (3p) Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z}, T, *)$, unde $xTy = x + y - 5$, iar $x * y = xy - 5x - 5y$. Dacă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, este un izomorfism între inelele $(\mathbb{Z}, T, *)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, atunci:

A $a = 3,\ b = -3$; B $a = 5,\ b = -5$; C $a = 1,\ b = 3$;
D $a = 1,\ b = -5$; E $a = -3,\ b = 1$.

13. (3p) Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z}, T, *)$, unde $xTy = x+y-5$, iar $x*y = xy - 5x - 5y$. Atunci soluţia $x \in \mathbb{Z}$ a ecuaţiei $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2024 ori } x} = 3^{2024} + 5$ este:

A $x = 2$; B $x = 5$; C $x = 8$; D $x = 11$;
E $x = 14$.

14. (3p) Vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{v} = (m + 2)\vec{i} - m\vec{j}$, $m \in \mathbb{R}$, sunt perpendiculari. Atunci m este:

A $\pm 4\sqrt{3}$; B $\pm 2\sqrt{3}$; C ± 4; D $2 \pm 2\sqrt{3}$;
E $4 \pm 2\sqrt{3}$.

15. (3p) Ecuaţia dreptei care trece prin $A(1, -2)$ şi este perpendiculară pe d: $5x - 3y = 2$ este:

A d': $7x+5y+3 = 0$; B d': $3x+5y+7 = 0$; C d': $7y+5x+3 = 0$;
D d': $3y + 5x + 7 = 0$; E d': $3y + 7x + 5 = 0$.

16. (3p) Fie $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ astfel încât $\cos\alpha = \frac{-2}{5}$. Atunci $\sin\alpha$ este:

A $\frac{\sqrt{21}}{5}$; B $\frac{-\sqrt{21}}{5}$; C $\frac{\sqrt{23}}{5}$; D $\frac{-\sqrt{23}}{5}$; E $\frac{7}{25}$.

17. (3p) Dacă $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, atunci $\cos 2\alpha =$

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{-\sqrt{21}}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\sqrt{23}}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{-\sqrt{23}}{5}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{7}{25}$.

18. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - e^{2x}$. Asimptota oblică la graficul lui f către $-\infty$:

$\boxed{\text{A}}$ nu există; $\boxed{\text{B}}$ trece prin origine;
$\boxed{\text{C}}$ este o dreaptă verticală; $\boxed{\text{D}}$ este o dreaptă orizontală;
$\boxed{\text{E}}$ este $y = 2x + 1$.

19. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - e^{2x}$. Următoarea inegalitate este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) \leq -2$; $\boxed{\text{B}}$ $f(x) \geq -2$; $\boxed{\text{C}}$ $f(x) \leq -1$;
$\boxed{\text{D}}$ $f(x) \geq -1$; $\boxed{\text{E}}$ $f(x) \geq 0$.

20. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{2024}\sin x$. Atunci $f'(0) =$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2024; $\boxed{\text{E}}$ -2024.

21. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x}$. Atunci pentru orice $n \geq 1$, derivata de ordinul n a lui f este:

$\boxed{\text{A}}$ $f^{(n)}(x) = 3^n e^{-3x}$; $\boxed{\text{B}}$ $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$;
$\boxed{\text{C}}$ $f^{(n)}(x) = -3^n e^{-3x}$; $\boxed{\text{D}}$ $f^{(n)}(x) = -3e^{-3x}$;
$\boxed{\text{E}}$ $f^{(n)}(x) = -3^n e^{3x}$.

22. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Dacă F este o primitivă a lui f şi $F(0) = 3$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $F(x) = x^2 + 3$; $\boxed{\text{B}}$ $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$; $\boxed{\text{C}}$ $F(x) = x^2 + 4$;
$\boxed{\text{D}}$ $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4$; $\boxed{\text{E}}$ $F(x) = x^2$.

23. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^2 - 4}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{15}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5}{8}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{15}{2}$.

24. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x-5)}{x-5}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ 5; $\boxed{\text{E}}$ -5.

25. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+2x-5}{x^2}\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $5+\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $\ln 4-1$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $1+\ln 2$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2-\dfrac{5}{2}$.

26. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $e-2$; $\boxed{\text{B}}$ $2-e$; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ $e-1$; $\boxed{\text{E}}$ $1-e$.

27. (3p) Fie $a\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{dacă } x<2,\\ ax+3. & \text{dacă } x\geq 2.\end{cases}$
Mulţimea valorilor lui a pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1\}$.

28. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^5+\sqrt[5]{x})\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

29. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 2;\,x>2}\left(\dfrac{\arcsin(x-2)}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

30. (3p) Pentru orice $k\geq 2$, valoarea limitei

$l_k=\lim\limits_{x\to 2;\,x>2}\left(\dfrac{\arcsin(x-2)}{(x-2)^k}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt[6]{e}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{6}$.

Varianta 18

1. (3p) Modulul numărului complex $z = \dfrac{8+5i}{3-4i}$ este:

$\boxed{A}$ $\dfrac{9}{5}$; $\boxed{B}$ $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{\sqrt{89}}{7}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{\sqrt{89}}{5}$; $\boxed{E}$ $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$.

2. (3p) Funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ şi $f(2) = 4$ este:

$\boxed{A}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + 1$; $\boxed{B}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$; $\boxed{C}$ $f(x) = x^2 + x + 1$; $\boxed{D}$ $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2}$; $\boxed{E}$ $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{2}$.

3. (3p) În mulţimea numerelor complexe, soluţia ecuaţiei $z^2 = -7$ este:

$\boxed{A}$ $\{\pm\sqrt{7}\}$; $\boxed{B}$ $\{\pm i\sqrt{7}\}$; $\boxed{C}$ $\emptyset$; $\boxed{D}$ $\dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$;

$\boxed{E}$ $\{i\sqrt{7}\}$.

4. (3p) În mulţimea numerelor reale, soluţia ecuaţiei $x^3+7x^2+8x-4=0$ este:

$\boxed{A}$ $\left\{-2, \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; $\boxed{B}$ $\{\pm 2, \sqrt{33}\}$; $\boxed{C}$ $\left\{-2, \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$;

$\boxed{D}$ $\left\{\pm 2, \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; $\boxed{E}$ $\left\{-2, \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$.

5. (3p) Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(5 + \sqrt{5})^{20}$ este:

$\boxed{A}$ 20; $\boxed{B}$ 21; $\boxed{C}$ 10; $\boxed{D}$ 11; $\boxed{E}$ 5.

6. (3p) Numărul funcţiilor $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ care verifică relaţia $f(1) = 3$ este:

$\boxed{A}$ 2; $\boxed{B}$ 4; $\boxed{C}$ 6; $\boxed{D}$ 8; $\boxed{E}$ 9.

7. (3p) Dacă numerele a, b, 20 sunt în progresie geometrică şi a, b, 15 sunt în progresie aritmetică, atunci muţimea valorilor pe care le poate lua a este:

A $\{5\}$; B $\{15\}$; C $\{5,\ 15\}$; D $\{45\}$; E $\{5, 45\}$.

8. (3p) Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ este:

A $(a-b)(b-c)(c-a)$; B $a^2+b^2+c^2$; C $(a+b)(b+c)(c+a)$;
D $c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)$; E $(a-b)(b-c)(a-c)$.

9. (3p) Dacă $a = b$ şi $b \neq c$, rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ este:

A 0; B 1; C 2; D 3; E 4.

10. (3p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,\ b \in \mathbb{R}^*$. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ atunci:

A $x_n = a^n$; $y_n = b^n$; B $x_n = na$; $y_n = nb$;
C $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$; $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$;
D $x_n = \dfrac{a^n + b^n}{2}$; $y_n = \dfrac{a^n - b^n}{2}$; E $x_n = (a+b)^n$; $y_n = (a-b)^n$.

11. (3p) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c > 0$ şi rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$. Nicio rădăcină a lui f nu poate fi:

A complexă; B reală; C strict pozitivă; D nenulă;
E negativă.

12. (3p) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c > 0$ şi rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$. Atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$

A $a^3 + 2ab + 3c$; B $-a^3 + 3ab - 3c$; C $-a^3 + 2ab - 3c$;
D $a^3 - 3ab - 3c$; E $-a^3 + 2ab - 3c$;

13. (3p) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX + b$, cu $a,\ b > 0$ şi rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$. Atunci $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 =$

A $-a^5 + a^3 b$; B $5ab$; C $a - b$; D $a^2 + 3b$; E $ab - 3$.

14. (3p) Soluţia din intervalul $[0, \pi]$ a ecuaţiei $\sin x + \cos x = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{7\pi}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3\pi}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3\pi}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

15. (3p) Soluţia din intervalul $[-1, 1]$ a ecuaţiei $\arcsin x + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

16. (3p) Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Dacă vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} - (a+2)\vec{j}$ sunt coliniari, atunci $a =$

$\boxed{\text{A}}$ -4; $\boxed{\text{B}}$ -2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ 4.

17. (3p) În triunghiul ABC, $AB = 4$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$. Aria triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ $2\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $4\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $6\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $8\sqrt{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $16\sqrt{3}$.

18. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x - 4^x}{4^x - 5^x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

19. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}(4^x - 3^x)^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

20. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 1.

21. (3p) Valoarea integralei $\int_1^e \frac{1}{x(\ln x + 1)}\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ $e - 1$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $e + 1$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

22. (3p) Valoarea integralei $\int_2^5 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $5\sqrt{28} + \frac{3}{2}(\ln(5 + \sqrt{28}) - \ln(2 + \sqrt{7}))$;

B $5\sqrt{7}+\dfrac{3}{2}(\ln(5+\sqrt{28})-\ln(2+\sqrt{7}))$;

C $\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{5+\sqrt{28}}{2+\sqrt{7}}$; D $4\sqrt{7}+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$; E $5\sqrt{28}+3\ln\dfrac{5+\sqrt{28}}{2+\sqrt{7}}$.

23. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$ este:

A 0; B $\dfrac{\pi}{3}$; C $\dfrac{\pi}{6}$; D $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; E $\dfrac{1}{\sqrt{12}}\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{12}}$.

24. (3p) Derivata funcţiei $\cos(\ln(x^2+2))$ este:

A $\dfrac{-2x\sin(\ln(x^2+2))}{x^2+2}$; B $\dfrac{2x\sin(\ln(x^2+2))}{x^2+2}$;

C $\dfrac{2x\cos(\ln(x^2+2))}{x^2+2}$; D $\dfrac{-\sin(\ln(x^2+2))}{x^2+2}$; E $\dfrac{\sin(\ln(x^2+2))}{x^2+2}$.

25. (3p) O primitivă a funcţiei $f(x)=6x+4$ este:

A $F(x)=3x^2+4x+3$; B $F(x)=\dfrac{6x^2-8x}{2}$;

C $F(x)=\dfrac{6x^2-4x}{2}$; D $F(x)=3x^2+2x$; E $F(x)=6x^2+4x$.

26. (3p) Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(kx)$. Atunci $f_1'(x)=$

A $\cos x$; B $\sin x$; C $-\cos x$; D $-\sin x$; E $-\sin x+\cos x$.

27. (3p) Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(kx)$. Atunci $f_5'(0)=$

A 5; B 6; C 10; D 11; E 15.

28. (3p) Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(kx)$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_{100}(x)}{x}$ este:

A 1000; B 1010; C 1050; D 5050; E 5000.

29. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$. Pentru graficul lui f, dreapta $y=\dfrac{1}{2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ asimptotă oblică spre $+\infty$; $\boxed{\text{B}}$ asimptotă oblică spre $-\infty$;
$\boxed{\text{C}}$ asimptotă verticală la stânga şi la dreapta;
$\boxed{\text{D}}$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$; $\boxed{\text{E}}$ asimptotă oblică spre $\pm\infty$.

30. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$. Pentru graficul lui f, dreapta $x=-\dfrac{3}{2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ asimptotă oblică spre $+\infty$; $\boxed{\text{B}}$ asimptotă oblică spre $-\infty$;
$\boxed{\text{C}}$ asimptotă verticală la stânga şi la dreapta;
$\boxed{\text{D}}$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$. $\boxed{\text{E}}$ asimptotă oblică spre $\pm\infty$.

Varianta 19

1. (3p) În mulţimea numerelor reale, soluţia ecuaţiei $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1, \log_2 3\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{\log_3 2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{\log_2 3\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, \log_3 2\}$.

2. (3p) Valoarea expresiei $C_7^5 + A_3^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1166; $\boxed{\text{B}}$ 2266; $\boxed{\text{C}}$ 1266; $\boxed{\text{D}}$ 2166; $\boxed{\text{E}}$ 3366.

3. (3p) Valoarea expresiei $C_{2024}^0 + C_{2024}^1 + C_{2024}^2 + \ldots C_{2024}^{2024}$ este egală cu :

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2^{2024}; $\boxed{\text{D}}$ 3^{2024}; $\boxed{\text{E}}$ 10^{2024}.

4. (3p) În mulţimea numerelor complexe, soluţia ecuaţiei $x^2 - 3x + 7 = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\dfrac{3 \pm i\sqrt{19}}{2}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\dfrac{2 \pm i\sqrt{17}}{2}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{19}}{2}\right\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}\right\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{\dfrac{3 \pm i\sqrt{15}}{2}\right\}$.

5. (3p) Valoarea expresiei $\log_2 16 + \log_9 3 + \log_6 2^7 + \log_6 3^7$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 11; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{23}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 12; $\boxed{\text{E}}$ 13.

6. (3p) Fie $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{-1,2,-3,4,-5\}$ o funcţie bijectivă. Atunci suma $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ -3.

7. (3p) Numărul funcţiilor $f : \{0,1,2,\ldots,9\} \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ care au proprietatea că $f(k) = k$ pentru orice k par este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 10^2; $\boxed{\text{C}}$ 10^3; $\boxed{\text{D}}$ 10^4; $\boxed{\text{E}}$ 10^5.

8. (3p) Modulul numărului complex $z = (3i - 4)^{10}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2^{10}; $\boxed{\text{B}}$ 3^{10}; $\boxed{\text{C}}$ 4^{10}; $\boxed{\text{D}}$ 5^{10}; $\boxed{\text{E}}$ 7^{10}.

9. (3p) Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ este:

$\boxed{A}$ -5; $\boxed{B}$ 0; $\boxed{C}$ 10; $\boxed{D}$ -18; $\boxed{E}$ -10.

10. (3p) Soluţia sistemului $\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ -x + 3y + z = 5 \\ -4x + 2y - z = 1 \end{cases}$ este:

$\boxed{A}$ $\{1, 2, -1\}$; $\boxed{B}$ $\{-1, 2, 1\}$; $\boxed{C}$ $\{1, -2, 1\}$;

$\boxed{D}$ $\{-1, -2, 1\}$; $\boxed{E}$ $\{1, -2, -1\}$.

11. (3p) Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Atunci $AB - BA =$:

$\boxed{A}$ O_2; $\boxed{B}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\boxed{C}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{D}$ I_3; $\boxed{E}$ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

12. (3p) Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Atunci $x_1^{-2024} + x_2^{-2024} + x_3^{-2024} + x_4^{-2024} =$

$\boxed{A}$ 4; $\boxed{B}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{C}$ $2i + 2$; $\boxed{D}$ 0; $\boxed{E}$ $\frac{1}{2}$.

13. (3p) Fie legea de compozitţie $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x * y = x + y + xy$. Atunci $\frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{2024}$ este:

$\boxed{A}$ 1000; $\boxed{B}$ 100; $\boxed{C}$ 200; $\boxed{D}$ 2000; $\boxed{E}$ 2024.

14. (3p) Dacă $A(1,\, 2)$, $B(-2,\, 5)$, $C(3,\, 0)$, atunci $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$ este:

$\boxed{A}$ 15; $\boxed{B}$ -18; $\boxed{C}$ 24; $\boxed{D}$ -42; $\boxed{E}$ 36.

15. (3p) În triunghiul ABC, $AB = 10$ şi $C = \frac{\pi}{3}$. Lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este:

$\boxed{A}$ 10; $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\boxed{C}$ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; $\boxed{D}$ $10\sqrt{3}$; $\boxed{E}$ $-10\sqrt{3}$.

16. (3p) Fie $A(0,\, 3)$, $B(-2,\, 5)$, $C(-3,\, -1)$. Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G(x_G,\, y_G)$, unde:

A $x_G = -2,\ y_G = 3$; B $x_G = \frac{1}{3},\ y_G = \frac{2}{3}$;
C $x_G = -\frac{5}{3},\ y_G = \frac{7}{3}$; D $x_G = \frac{2}{3},\ y_G = -\frac{5}{3}$;
E $x_G = -\frac{1}{3},\ y_G = \frac{4}{3}$.

17. (3p) Când $\cos x = \frac{1}{9}$, $\cos 2x$ este egal cu:

A $\frac{2}{9}$; B $-\frac{2}{9}$; C $\frac{4}{81}$; D $-\frac{4}{81}$; E $-\frac{79}{81}$.

18. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2024} + x^{2023} + x^{2022} + \cdots + x + 1$ şi notăm cu x_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$, rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.
Suma $\sum\limits_{k=1}^{2024} \frac{1}{x_k - 1}$ este egală cu:

A 0; B $\frac{1}{2024}$; C $-\frac{1}{2024}$; D 2024; E -2024.

19. (3p) Valoarea integralei $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{x}\,dx$ este:

A $1 - 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[5]{2}$; B $2 + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[5]{2}$; C $3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[5]{2}$;
D $2 - 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[5]{2}$; E $1 + 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[5]{2}$.

20. (3p) Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$ este:

A 0; B $\frac{\pi}{3}$; C $-\frac{2}{15}$; D $\frac{7}{24}$; E $-\frac{3}{16}$.

21. (3p) Valoarea integralei $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ este:

A $\ln 2$; B $2\ln 2$; C $2\ln 2 - 1$; D $\ln 2 + 1$;

E $2 - \ln 2$.

22. (3p) Valoarea integralei $\int_1^5 x \arccos \frac{1}{x}\,dx$ este:

A $\frac{1}{5}\arccos\frac{1}{5}-\sqrt{3}$; B $\frac{25}{2}\arccos\frac{1}{5}-\sqrt{6}$;
C $\frac{25}{2}(\arccos\frac{1}{5}-\arccos 1)$; D $\frac{1}{5}\arccos 1$; E $\frac{1}{5}\arccos\frac{1}{5}+\sqrt{2}$.

23. (3p) Dacă $I_n=\int\cos^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, atunci:

A $I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ \forall\, n\geq 2$;
B $I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-2}x\,\sin^2 x+\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ \forall\, n\geq 2$;
C $I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-2}x\,\sin^2 x+(n-1)I_{n-2},\ \forall\, n\geq 2$;
D $I_n=-\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\sin x+(n-1)I_{n-2},\ \forall\, n\geq 2$;
E $I_n=-\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-1},\ \forall\, n\geq 1$.

24. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+3}-x)$ este:

A 0; B 5; C $\frac{5}{2}$; D -5; E $-\frac{5}{2}$.

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sin(x-8)}{x^2-64}$ este:

A 1; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{1}{8}$; E $\frac{1}{16}$.

26. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2024}-1}{x-1}$ este:

A 0; B ∞; C 1; D 2024; E -2024.

27. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^{2024}x-1}{x^2}$ este:

A 2024; B -2024; C 2000; D -1000; E -1012.

28. (3p) Derivata funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[5]{x^7}$ este:

A $f'(x)=\sqrt[5]{x^2}$; B $f'(x)=\sqrt[5]{x^4}$; C $f'(x)=-\frac{5}{7}\sqrt[5]{x}$;

D $f'(x) = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; E $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt[5]{x^3}$.

29. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{100} + x^2 + 1$. Atunci $f^{(100)}(x)$ este:

A $100x$; B 0; C 100; D $99!x$; E $100!$.

30. (3p) Mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}, \\ 4 - 3x & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este:

A $\emptyset$; B $\{1; 2; 4\}$; C $\{1; -4\}$; D $\{-2; 1\}$; E $\{-2; 0; 1\}$.

Varianta 20

1. (3p) Modulul numărului complex $z = (1-2i)^8$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{5}$; $\boxed{\text{C}}$ 25; $\boxed{\text{D}}$ $125\sqrt{5}$; $\boxed{\text{E}}$ 625.

2. (3p) Numărul funcţiilor bijective $f : \{0,1,2,3,4,5\} \to \{0,2,4,6,8,10\}$ cu proprietatea $f(0) = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 100; $\boxed{\text{D}}$ 120; $\boxed{\text{E}}$ 60.

3. (3p) Fie f o funcţie de gradul al doilea al cărei grafic trece prin punctele $A(-2,0)$, $B(0,4)$, $C(1,3)$. Atunci $f(4)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -10; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ -12; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ -16.

4. (3p) Soluţia ecuaţiei $9 \cdot 4^x + 4 \cdot 9^x = 13 \cdot 6^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0;2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0;4\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{D}}$ $\{4;6;9\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0;2;4\}$.

5. (3p) Mulţimea valorilor lui m pentru care ecuaţia $3x^2 + mx + 2 = 0$ nu are nicio soluţie reală este:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $(-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$; $\boxed{\text{C}}$ $(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$;
$\boxed{\text{D}}$ $(-\infty; -2\sqrt{3}) \bigcup (2\sqrt{3}; \infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(-\infty; -2\sqrt{6}) \bigcup (2\sqrt{6}; \infty)$.

6. (3p) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_4 + a_{11} = 12$, atunci $a_7 + a_8$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 14; $\boxed{\text{D}}$ 24; $\boxed{\text{E}}$ 6.

7. (3p) Dacă $\log_2 5 = a$, atunci $\log_{25} 40$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $3a+1$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{a+3}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{a+3}{2a}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2a+1}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{3a+1}{2}$.

8. (3p) Numărul $\sqrt{13+6\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{5}$; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{3}$.

9. (3p) Dacă $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 5 \\ a^2 & b^2 & 25 \end{vmatrix} = (a-b)(b-5)$ atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 4$; $\boxed{\text{D}}$ $a = 6$; $\boxed{\text{E}}$ $a = 8$.

10. **(3p)** Rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

11. **(3p)** Produsul AB al matricelor $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} -14 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} -14 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 14 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$.

12. **(3p)** Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 10X^3 + 4X^2 + \sqrt{3}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Atunci $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. **(3p)** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci, pentru $n \geq 2$, A^n este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 2n & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} n^2 & 0 & n^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
$\boxed{\text{D}}$ O_3; $\boxed{\text{E}}$ $2^n I_3$.

14. **(3p)** Valoarea numărului $\sin(\arcsin \dfrac{1}{5}) + \sin(\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2})$

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{2+5\sqrt{2}}{10}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2-5\sqrt{2}}{10}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{10}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{10}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{10}$.

15. **(3p)** Dreapta suport a medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(2,4)$, $B(5,2)$, $C(-3,4)$ are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 2x + 3$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x + 5$; $\boxed{\text{C}}$ $2y = x - 4$;
$\boxed{\text{D}}$ $y - x = 3$; $\boxed{\text{E}}$ $3x + y = 1$.

16. (3p) Fie $A(2,\,4)$, $B(5,\,0)$, $C(-1,\,1)$. Aria triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{11}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{21}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 20.

17. (3p) $\sin 120^\circ$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

18. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg} x \sin\dfrac{1}{x}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

19. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(5^x - 6^x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

20. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0;\, x>0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{e}$.

21. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(5x))}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{3}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{9}{25}$; $\boxed{\text{E}}$ ∞.

22. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4 \sin^3 x\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ -2.

23. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^x \cdot \cos^2 x}\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

24. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2 + 2024)^{2024}\, dx$ este:

A $\dfrac{2024^{2024}}{2024}$; B $\dfrac{2024^{2025}}{2025}$; C $\dfrac{2024^{2025}}{4050}$;

D $\dfrac{2024^{2025}-2028^{2025}}{2025}$; E $\dfrac{2024^{2025}-2028^{2025}}{4050}$.

25. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[7]{x^2}\,dx$ este:

A 1; B $\dfrac{1}{7}$; C $\dfrac{2}{7}$; D $\dfrac{9}{7}$; E $\dfrac{7}{9}$.

26. (3p) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3a & \text{dacă } x > 5, \\ ax + 1 & \text{dacă } x \leq 5 \end{cases}$
o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Atunci a este:

A 4; B 3; C 2; D 1; E 0.

27. (3p) Mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 20 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}, \\ 10x - 5 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este:

A $\{0\}$; B $\{5\}$; C $\{0; 5\}$; D $\{\pm 5\}$; E $\{0; \pm 5\}$.

28. (3p) Derivata $(\cos x + \operatorname{arcctg} x)'$ este:

A $-\sin x - \dfrac{1}{1+x^2}$; B $\sin x - \dfrac{1}{1+x^2}$; C $\sin x + \dfrac{1}{1+x^2}$;

D $-\sin x + \dfrac{1}{1-x^2}$; E $-\sin x - \dfrac{1}{1-x^2}$.

29. (3p) Derivata $(\ln(3 + \operatorname{tg}^2 x))'$ este:

A $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg}^2 x}$; B $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x(3 + \operatorname{tg}^2 x)}$; C $\dfrac{\cos x}{3 + \operatorname{tg}^2 x}$;

D $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x(3 + \operatorname{tg}^2 x)}$; E $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos x(3 + \operatorname{tg}^2 x)}$.

30. (3p) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ în punctul $A(-2, 1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y + 5x - 2 = 0;$ $\boxed{\text{B}}$ $y + 3x + 5 = 0;$ $\boxed{\text{C}}$ $y - 4x + 1 = 0;$
$\boxed{\text{D}}$ $y - 2x + 7 = 0;$ $\boxed{\text{E}}$ $y + 6x - 4 = 0.$

Varianta 21

1. **(3p)** Fie progresia aritmetică $1, 4, 7, 10, \ldots$.Al 2024-lea termen al acestei progresii este:

A 6070; B 6072; C 4048; D 5060; E 5048.

2. **(3p)** Se consideră în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{5x-1} - 2x + 1 = 0$. Mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii este:

A $\{1\}$; B $\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right\}$; C $\{2\}$; D $\left\{2, \frac{1}{4}\right\}$;
E $\{4, 7\}$.

3. **(3p)** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{2024} * \frac{2}{2024} * \frac{3}{2024} * \cdots * \frac{4068}{2024}$$

este:

A $E = 3$; B $E = 4048$; C $E = 2024$; D $E = 1$;
E $E = 2$.

4. **(3p)** Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}$. Valoarea derivatei lui f în punctul $x = 1$ este:

A e; B $\mathrm{e} + 1$; C $\mathrm{e} - 1$; D $\frac{1}{\mathrm{e}}$; E $\frac{1}{\mathrm{e} - 1}$.

5. **(3p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) + 2$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{f(x) - 2}{f(x+1) - 2} \right)^x$ este:

A 1; B e; C e^2; D e^{-2}; E e^{-3}.

6. **(3p)** Fie x număr real, astfel încât $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Valoarea lui $\sin 2x$ este:

A $\frac{1}{4}$; B $\frac{9}{16}$; C $\frac{3}{4}$; D $\frac{2}{5}$; E $\frac{1}{2}$.

7. (3p) Mulţimea numerelor naturale nenule ce satisfac inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot C_n^2 < 8$ este:

A $\{1,2,3\}$; B $\{2,3,5,6\}$; C $\{1,2,3,4,5\}$; D $\{2,3,4\}$;

E $\{2,3,4,5,6,7\}$.

8. (3p) Valoarea lintegralei $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}\mathrm{d}x$ este:

A $\ln 2$; B $\ln\frac{3}{2}$; C $\ln\frac{4}{3}$; D $\ln\frac{2}{3}$; E $\ln 3$.

9. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$. Valoarea integralei $\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)\cdot f(x)\mathrm{d}x$ este :

A $\frac{1}{4}$; B 1; C 0; D $\frac{1}{2}$; E $\frac{3}{2}$.

10. (3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Matricea $C=A+A^2+A^3+\cdots+A^{2024}$ este:

A $C=\begin{pmatrix}2024 & 0 & 0\\ 0 & 2024 & 0\\ 0 & 0 & 2024\end{pmatrix}$; B $C=\begin{pmatrix}2024 & 1012 & 0\\ 0 & 2024 & 0\\ 0 & 1012 & 2024\end{pmatrix}$;

C $C=\begin{pmatrix}2024 & 1012 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2024\end{pmatrix}$; D $C=\begin{pmatrix}2024 & 0 & 0\\ 1012 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2024\end{pmatrix}$;

E $C=\begin{pmatrix}2024 & 0 & 0\\ 1012 & 0 & 1012\\ 0 & 2024 & 0\end{pmatrix}$.

11. (3p) Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+2$ cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3. Valoarea expresiei $E=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ este:

A $E = 1$; B $E = \frac{1}{2}$; C $E = -1$; D $E = -\frac{1}{2}$;
E $E = 2$.

12. (3p) Un triunghi ABC are laturile $AB = 6, BC = 10$, iar lungimea razei cercului său circumscris este $R = 5$. Sinusul unghiului $\widehat{ABC}$ este:

A 1; B $\frac{3}{5}$; C $\frac{4}{5}$; D $\frac{9}{16}$; E $\frac{5}{16}$.

13. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2) + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = 0$ este:

A $\{3\}$; B $\{2\sqrt{2}, 1\}$; C $\{1, 3\}$; D $\{2\sqrt{2}\}$;
E $\{2\}$.

14. (3p) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $(m-1) \cdot x^2 - 2(m-2)x + m - 4 = 0$ să verifice $x_1 < 2 < x_2$.

A $m \in (0, 1)$; B $m \in (1, 2)$; C $m \in \emptyset$;
D $m \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$; E $m \in [-2, -1]$.

15. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ şi primitiva sa $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Valoarea limitei $\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - x}{x^3}$ este:

A $\frac{1}{9}$; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{2}{3}$; D $\frac{1}{3}$; E $\frac{1}{6}$.

16. (3p) Valoarea integralei $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 9}\mathrm{d}x$ este:

A $\ln 9$; B $\ln \frac{2}{9}$; C $\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{13}{9}$; D $\frac{1}{4} \cdot \ln 2$; E $\ln 3$.

17. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $3x - 4y + 15 = 0$ şi punctul $A(1, 2)$. Distanţa de la punctul A la dreapta d este:

A 1; B $\frac{3}{2}$; C $\frac{5}{4}$; D $\frac{5}{2}$; E 2.

18. (3p) Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-4y+4z=-1. \\ x+6y-z=1 \end{cases}$ Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţia unică a sistemului, atunci produsul $x_0y_0z_0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{3}{2}$.

19. (3p) Dacă $z \in \mathbb{C}$ este soluţie a ecuaţiei $|z| + z = 8 + 4i$, atunci valoarea lui $|z|$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 8; $\boxed{\text{C}}$ 5; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 6.

20. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} - x$. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul $(0, 1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = x$; $\boxed{\text{B}}$ $y = -x+1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = x+1$; $\boxed{\text{D}}$ $y = -x-1$; $\boxed{\text{E}}$ $y = -x$.

21. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

22. (3p) Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X + m \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul admite o rădăcină dublă este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1, 2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{2, 4\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1, 1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-2, 2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, 3\}$.

23. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$. Aria suprafeţei plane mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2(\mathrm{e}-1)$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{e}-1$; $\boxed{\text{C}}$ $3\mathrm{e}+1$; $\boxed{\text{D}}$ $3\mathrm{e}-1$; $\boxed{\text{E}}$ $2\mathrm{e}+1$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$. Ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f este:

A $y = x+\frac{2}{3}$; B $y = x-2$; C $y = x-\frac{1}{3}$; D $y = x+2$;
E $y = x + 3$.

25. **(3p)** Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care vârfurile parabolelor $y = x^2 + 2(m - 1)x + m - 1$ se află deasupra axei Ox.

A $m \in \emptyset$; B $m \in \mathbb{R}$; C $m \in (1, 2)$; D $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$;

E $m \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

26. **(3p)** Se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Modulul vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$ este:

A 7; B 3; C 4; D 6; E 8.

27. **(3p)** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie

$$x * y = 2xy + 3x - y.$$

Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $(x + 1) * x = 9$ este:

A 0; B -2; C 2; D 1; E -1.

28. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{4} + 1$; B $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}$; C $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}$; D $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$;
E $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}$.

29. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - 2x}\right)$ este:

A 2; B 1; C -1; D $+\infty$; E 0.

30. **(3p)** Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei f este:

A $\frac{\pi^2}{6}$; B $\frac{\pi^2}{4}$; C $\frac{\pi^2}{16}$; D $\frac{\pi^2}{8}$; E $\frac{\pi^2}{2}$.

Varianta 22

1. (3p) Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $|||x-1|-1|-1| = 2$ este:

A 3; B 2; C 0; D 4; E 1.

2. (3p) Termenul care nu-l conţine pe x în dezvoltarea $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{72}$ este:

A $T_{36} = C_{72}^{35}$; B $T_{24} = C_{72}^{23}$; C $T_{18} = C_{72}^{17}$;
D $T_{55} = C_{72}^{54}$; E $T_{25} = C_{72}^{24}$.

3. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = xy + \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{9}.$$

Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x * x * x = x$ este:

A -1; B $-\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{1}{3}$; D 0; E $\dfrac{2}{3}$.

4. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)+2$. Valoarea derivatei lui f în punctul $x = 3$ este:

A 1; B 2; C 3; D 6; E 0.

5. (3p) Se consideră funcţia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x + \ln(x+1) - \ln(x-1).$$

Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot (f(x) - 2x)$ este:

A 1; B e^{-1}; C e; D e^2; E 2.

6. (3p) Fie x număr real, astfel încât $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4$. Valoarea lui $\sin 2x$ este:

A $\dfrac{1}{4}$; B $\dfrac{3}{4}$; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{1}{16}$; E $\dfrac{1}{8}$.

7. (3p) Valoarea numărului $a = \log_2(6 + 4\sqrt{2}) + 2\log_2(2 - \sqrt{2})$ este:

A $a = 2$; B $a = 3$; C $a = \log_2(3\sqrt{2})$; D $a = 4$;
E $a = 6$.

8. (3p) Valoarea lintegralei $\int_1^4 \frac{1}{x \cdot (x+2)} \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\ln 4$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln \sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 3$.

9. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$. Valoarea integralei $\int_0^1 (f(x) - x + 1)\mathrm{d}x$ este :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\pi}{6}$.

10. (3p) Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Valoarea determinantului

$$D = \det\left[A(1) + A\left(\frac{1}{2}\right) + A\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + A\left(\frac{1}{2024}\right)\right]$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ $D = 2024$; $\boxed{\text{B}}$ $D = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $D = 2024^2$;
$\boxed{\text{D}}$ $D = 1012 \cdot 2025$; $\boxed{\text{E}}$ $D = 2024^3$.

11. (3p) Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + (a-1)X - 1$, ce are rădăcina triplă $x = 1$. Valoarea lui $a + b + c$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ -6.

12. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(a,-5)$ şi $C(0,2)$. Valoarea numărului real a pentru care ΔABC este dreptunghic în A este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ -3; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{4}$.

13. (3p) Valoarea sumei $2^5 + 2^8 + 2^{11} + \cdots + 2^{77}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2^{80} - 2^5}{7}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2^{77} - 2^5}{7}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2^{82} - 2^5}{31}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2^{85} - 2^5}{7}$;

E $\dfrac{2^{88}-2^5}{31}$.

14. (3p) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0$ să verifice relaţia $|x_1-x_2|=1$.

A $m=1$; B $m=2$; C $m \in \{1,-2\}$; D $m=-1$;
E $m \in \{0,2\}$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^{1} x^{2024} \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{1}{2024}$; B $\dfrac{1}{2024^2}$; C $-\dfrac{1}{2025^2}$; D 1; E 0.

16. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3 \cdot (1+x)} \mathrm{d}x$ este:

A $-\dfrac{1}{8}+\ln\dfrac{4}{3}$; B $\dfrac{1}{4}+\ln\dfrac{2}{3}$; C $-\dfrac{1}{8}+\ln\dfrac{2}{3}$; D $\dfrac{1}{4}+\ln\dfrac{1}{3}$;
E $\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{4}{3}$.

17. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-1)$ şi $B(2,3)$. Ştiind că $x+ay+b=0$ este ecuaţia dreptei AB, valoarea lui $a+b$ este:

A $-\dfrac{3}{2}$; B 1; C -1; D 2; E $\dfrac{3}{2}$.

18. (3p) Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y-z=-4 \\ 2x+y+4z=25. \\ x+y+3z=18 \end{cases}$ Numărul soluţiilor (x_0,y_0,z_0) ale sistemului, cu x_0,y_0,z_0 numere naturale, este:

A 1; B 6; C 2; D 7; E 8.

19. (3p) Modulul numărului complex $z=\dfrac{4-2i}{3+i}$ este:

A 2; B 4; C $\sqrt{6}$; D $\sqrt{3}$; E $\sqrt{2}$.

20. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x-x$. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul $(1,\mathrm{e}-1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=2\mathrm{e}x-1$; $\boxed{\text{B}}$ $y=(\mathrm{e}-1)x$; $\boxed{\text{C}}$ $y=\mathrm{e}x+2$;
$\boxed{\text{D}}$ $y=-2\mathrm{e}x+1$; $\boxed{\text{E}}$ $y=(\mathrm{e}+1)x$.

21. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+5x}{5x^3+\cos x+\dfrac{1}{x^2}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ 5; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{5}{6}$.

22. **(3p)** Se consideră polinomul $f=X^4-3X^2+2X+3\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Valoarea expresiei $E=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+$ $+3\cdot\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ -5; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ -8; $\boxed{\text{E}}$ 3.

23. **(3p)** Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$. Aria suprafeţei plane mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2\ln\dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $3\ln\dfrac{9}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln\dfrac{16}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $2\ln\dfrac{9}{5}$; $\boxed{\text{E}}$ $3\ln\dfrac{9}{8}$.

24. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=x+\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $y=x-\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $y=x$; $\boxed{\text{D}}$ $y=x+2$;

$\boxed{\text{E}}$ $y=x-2$.

25. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Suma soluţiilor ecuaţiei $(f\circ f)(x)=f^2(x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -3; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 4.

26. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j}$. Dacă $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + (m-2)\vec{j}, m \in \mathbb{R}$, atunci valoarea numărului real m este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -1.

27. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = x + y - \frac{xy}{13}.$$

Valoarea expresiei $E = 1 * 2 * 3 * \cdots * 2024$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2024; $\boxed{\text{C}}$ 13; $\boxed{\text{D}}$ 26; $\boxed{\text{E}}$ 12.

28. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

29. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

30. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 6π; $\boxed{\text{B}}$ 8π; $\boxed{\text{C}}$ 9π; $\boxed{\text{D}}$ 10π; $\boxed{\text{E}}$ π.

Varianta 23

1. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_2(4-x^2)=\log_2(6-3x)$ este:

[A] $\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$; [B] $\left\{\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right\}$; [C] $\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$; [D] $\{1\}$;
[E] $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$.

2. (3p) Se consideră funcţia bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$ şi fie g inversa ei. Valoarea $g(4)$ este:

[A] 0; [B] 3; [C] 2; [D] $\frac{1}{3}$; [E] $\frac{2}{3}$.

3. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x*y=3xy-3x-3y+4.$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x*(x+1)\le 7$ este:

[A] $[-2,2]$; [B] $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$; [C] $[-1,2]$; [D] $\mathbb{R}$;
[E] $(0,2)$.

4. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{-2x}$. Valoarea derivatei lui f în punctul $x=\frac{1}{2}$ este:

[A] 2; [B] $\frac{1}{2}$; [C] 4; [D] $\frac{1}{4}$; [E] 0.

5. (3p) Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=x+\ln(x+1)$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ este:

[A] 0; [B] 2; [C] 1; [D] $\ln 2$; [E] $\ln 3$.

6. (3p) Mulţimea valorilor lui $x\in[0,2\pi)$ pentru care are loc egalitatea $2\sin 2x+6\sin x-2\cos x=3$ este:

[A] $\left\{\frac{4\pi}{3}\right\}$; [B] $\left\{\frac{7\pi}{6}\right\}$; [C] $\left\{\frac{5\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right\}$; [D] $\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$;
[E] $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

7. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{1}{2},1\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left[\frac{1}{2},1\right]$;
$\boxed{\text{E}}$ $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

8. (3p) Valoarea integralei $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{16}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{8}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{8}$.

9. (3p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$. Valoarea lui $a>0$ pentru care $\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ este :

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{3}$.

10. (3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} \frac{2025}{\sqrt{4049}} & -\frac{2024}{\sqrt{4049}} & 0 \\ \frac{2024}{\sqrt{4049}} & -\frac{2025}{\sqrt{4049}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Suma elementelor matricei $A^{2023}+A^{2024}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2024; $\boxed{\text{D}}$ 2025; $\boxed{\text{E}}$ 1.

11. (3p) Se consideră polinomul $f=X^4-3X^3+X+7$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4. Valoarea expresiei

$$E=(3-x_1)\cdot(3-x_2)\cdot(3-x_3)\cdot(3-x_4)$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ 7; $\boxed{\text{E}}$ 3.

12. (3p) Se consideră un triunghi ascuţit unghic ABC, cu $AB=2$, $BC=5$ şi aria egală cu 4. Valoarea cosinusului unghiului B este:

[A] $\frac{9}{16}$; [B] $\frac{2}{5}$; [C] $\frac{4}{5}$; [D] $\frac{3}{5}$; [E] $\frac{16}{25}$.

13. (3p) Valoarea sumei $8 + 13 + 18 + 23 + \cdots + 118$ este:

[A] 1449; [B] 1280; [C] 1920; [D] 1416; [E] 2242.

14. (3p) Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m+2)x - 1$ şi $g(x) = x^2 - 2x + m$. Mulţimea valorilor numărului real m pentru care intersecţia graficelor celor două funcţii are două puncte distincte, este:

[A] $\emptyset$; [B] $\{-1, 1\}$; [C] $(0, 1)$; [D] $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
[E] $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ este:

[A] 0; [B] -1; [C] 2; [D] -2; [E] 1.

16. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$ este:

[A] 2e; [B] 0; [C] e; [D] $\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e} - 1)$;
[E] $\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e}^2 - 1)$.

17. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(2, -5)$ şi $C(6, 1)$. Ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC este:

[A] $-5x+2y-1 = 0$; [B] $5x+3y-14 = 0$; [C] $2x+3y-11 = 0$;

[D] $2x - 3y + 7 = 0$; [E] $-2x + 5y - 13 = 0$.

18. (3p) Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \end{cases}$. Dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie a sistemului, cu $x_0 \neq 0$, atunci $\frac{2x_0 + y_0}{y_0 - 3z_0}$ are valoarea:

[A] 8; [B] 6; [C] -2; [D] -6; [E] 4.

19. **(3p)** Partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{6}{1+i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 6; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ -6; $\boxed{\text{D}}$ -3; $\boxed{\text{E}}$ -2.

20. **(3p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x + m)$, $m \in \mathbb{R}$. Valoarea lui m pentru care $f'(0) = 4$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ -3.

21. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{1}{2}$.

22. **(3p)** Se consideră ecuaţia $x^3 + 3x + 1 = 0$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Valoarea expresiei $E = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ -3.

23. **(3p)** Se consideră funcţia $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$. Valoarea lui $a > 2$, pentru care aria suprafeţei plane mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 2$ şi $x = a$ este $\ln 3$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{5}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{13}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 6; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{9}{4}$.

24. **(3p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 2x$; $\boxed{\text{B}}$ $y = -2x$; $\boxed{\text{C}}$ $y = -2x + \dfrac{1}{2}$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = -2x - \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $y = 2x + \dfrac{1}{4}$.

25. **(3p)** Se consideră $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k, n \geq 1$. Valoarea lui a_{2024} este:

$\boxed{\text{A}}$ $2024 \cdot 2^{2024}$; $\boxed{\text{B}}$ $2023 \cdot 2^{2023}$; $\boxed{\text{C}}$ 2^{2024}; $\boxed{\text{D}}$ $2024 \cdot 2^{2023}$;

$\boxed{\text{E}}$ 2^{2023}.

26. (3p) Se consideră ΔABC în care $AB = 5$, $AC = 8$ şi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. Valoarea ariei triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ 16; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 20; $\boxed{\text{D}}$ 40; $\boxed{\text{E}}$ 24.

27. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = xy - 2(x + y) + m,\ \ m \in \mathbb{R}.$$

Valoarea numărului real m pentru care $2024 * 2024 = 2022^2 + 2020$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2020; $\boxed{\text{B}}$ 2022; $\boxed{\text{C}}$ 2021; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 2024.

28. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \ln(1 + 2x)}{2 \sin x \cdot (\cos(3x) - 1)}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{9}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{9}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{2}{9}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

29. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_3^5 \frac{6x}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln \dfrac{27}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\ln \dfrac{135}{28}$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln \dfrac{5}{7}$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln 27$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln \dfrac{7}{5}$.

30. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi}{9}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2\pi}{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2\pi}{15}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3\pi}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\pi}{4}$.

Varianta 24

1. (3p) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^2-2x+5=0$, atunci valoarea expresiei $E=\dfrac{x_1^2-3x_1+4}{x_1^2-2x_1+3}+\dfrac{x_2^2-3x_2+4}{x_2^2-2x_2+3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $E=1$; $\boxed{\text{B}}$ $E=2$; $\boxed{\text{C}}$ $E=3$; $\boxed{\text{D}}$ $E=-1$; $\boxed{\text{E}}$ $E=-2$.

2. (3p) Dacă g este inversa funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2(x-1)$, atunci valoarea lui $g(2024)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2023; $\boxed{\text{B}}$ 2024; $\boxed{\text{C}}$ 1013; $\boxed{\text{D}}$ 1074; $\boxed{\text{E}}$ 1025.

3. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x*y=x+y-6.$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $(x^2+3x-1)*(2x^2-x+6)\geq 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$;

$\boxed{\text{C}}$ $\left[\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

4. (3p) Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\cdot e^{-x}-x$. Valoarea derivatei lui f în punctul $x=0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{1}{2}$.

5. (3p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln f(x))$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 2.

6. (3p) Dacă $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci valoarea expresiei

$$E=\frac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{ctg}^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}$$

este:

A $E=1$; B $E=2$; C $E=\dfrac{3}{2}$; D $E=\dfrac{3}{4}$;
E $E=\dfrac{2}{3}$.

7. (3p) Numărul natural nenul n pentru care are loc egalitatea

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2023}{1012}$$

este:

A 2024; B 2023; C 1011; D 1012; E 3035.

8. (3p) Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x+2x+3$ şi $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+3x+1$. Valoarea lintegralei $\displaystyle\int_0^1 f(x)\cdot F^2(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{1}{3}\left[(\mathrm{e}+5)^3-8\right]$; B $\dfrac{1}{2}\left[(\mathrm{e}+3)^3-5\right]$; C 1;
D $\dfrac{1}{2}\left[(\mathrm{e}+1)^2-1\right]$; E $\dfrac{1}{3}\left[(\mathrm{e}+3)^2-8\right]$.

9. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_3^5 \frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}\mathrm{d}x$ este :

A $\ln 2$; B $\ln 15$; C $\ln 10$; D $\ln 6$; E $\ln 12$.

10. (3p) Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\m&-m&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Valoarea determinantului matricei $A(1)+A(2)+\cdots+A(13)$ este:

A -2197; B 2197; C 1183; D 15379; E -15379.

11. (3p) Se consideră polinomul $f=X^4-4X+1$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4. Valoarea expresiei

$$E=(x_1^3-3)\cdot(x_2^3-3)\cdot(x_3^3-3)\cdot(x_4^3-3)$$

este:

A $E=1$; B $E=-2$; C $E=4$; D $E=-3$;
E $E=6$.

12. (3p) Se consideră ΔABC, în care $BC = 6$ şi $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{6}$. Lungimea razei cercului circumscris triungiului ABC este:

A 4; B 8; C 3; D 2; E 6.

13. (3p) Valoarea sumei $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 2024 \cdot 2024!$ este:

A $2024! + 1$; B $2024! - 1$; C $2025! + 2$; D $2025! - 1$; E $2024! - 2$.

14. (3p) Valoarea numărului real m pentru care dreapta $x = 1$ este axă de simetrie a parabolei $y = x^2 - mx + 3$ este:

A $m = 1$; B $m = -3$; C $m = 2$; D $m = -1$; E $m = \dfrac{1}{2}$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x + 2}{x + 3}$ este:

A $+\infty$; B 0; C 1; D $\dfrac{2}{3}$; E $\dfrac{1}{3}$.

16. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} \right) dx$ este:

A $\dfrac{\pi}{4} \ln 2$; B $\dfrac{\pi}{2} \ln 2$; C $\pi \ln 2$; D $\dfrac{\pi}{4}$; E $\dfrac{\pi}{2}$.

17. (3p) Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 9$, $BC = 10$ şi $AC = 11$. Aria sa este:

A $26\sqrt{2}$; B $24\sqrt{2}$; C $30\sqrt{2}$; D $12\sqrt{2}$; E $28\sqrt{2}$.

18. (3p) Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ -2x + 2y + z = 1 \end{cases}$. Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţia unică a sistemului, atunci produsul $x_0 y_0 z_0$ are valoarea:

A -200; B 200; C 40; D -40; E 100.

19. (3p) Se consideră numărul complex $z = 2 + (2a - 3)i, a \in \mathbb{R}$. Valoarea numărului $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z + i \cdot z$ este număr real, este:

A $\frac{1}{3}$; B $\frac{2}{3}$; C $\frac{3}{2}$; D $\frac{1}{2}$; E 3.

20. (3p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. Mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei f este:

A $\{e^2\}$; B $\{1\}$; C $\{e\}$; D $\{1,e\}$; E $\{1,e^2\}$.

21. (3p) Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\frac{7}{6}}{x-1}$ este:

A $\frac{12}{49}$; B $\frac{11}{6}$; C $\frac{13}{36}$; D $\frac{13}{7}$; E $\frac{13}{49}$.

22. (3p) Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+5X+a\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3. Valoarea numărului real a pentru care este adevărată egalitatea $x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$, este:

A -1; B 1; C $-\frac{3}{5}$; D 5; E $\frac{5}{3}$.

23. (3p) Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$. Aria suprafeţei plane mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ este:

A $\frac{5}{6}-\ln 2$; B $\frac{1}{6}+\ln 2$; C $\ln 2$; D 1; E $\frac{7}{6}-\ln 2$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1).$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este:

A $y=2x-1$; B $y=2x+1$; C $y=x+1$; D $y=2x$;

E $y=x-1$.

25. (3p) Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $2^{x+1}+2^{2-x}=9$ este:

$\boxed{A}$ 8; $\boxed{B}$ -4; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 1; $\boxed{E}$ -2.

26. (3p) Se consideră ΔABC în care $AB = 4$, $AC = 6$ şi $BC = 8$. Valoarea produsului scalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ este:

$\boxed{A}$ 4; $\boxed{B}$ -4; $\boxed{C}$ -6; $\boxed{D}$ 6; $\boxed{E}$ -8.

27. (3p) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă $x * y = x + y - 6$. Produsul numerelor reale x pentru care $a = 6 * 2x^2$, $b = x * \frac{x}{2}, c = (-11x^2) * 6$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ $-\frac{4}{3}$; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ $-\frac{1}{3}$; $\boxed{E}$ $\frac{7}{3}$.

28. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$. Valoarea limitei $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\int_0^t f(x)\mathrm{d}x}{t^4}$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{C}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{D}$ 0; $\boxed{E}$ $\frac{1}{3}$.

29. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x + 7}{x^2 + 9}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{A}$ $\ln 2 + \frac{7\pi}{12}$; $\boxed{B}$ $\frac{7\pi}{4} + \ln 2$; $\boxed{C}$ $\ln 2 + \frac{\pi}{12}$; $\boxed{D}$ $\frac{7\pi}{4} + \ln 3$;

$\boxed{E}$ $\ln 3 + \frac{\pi}{12}$.

30. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{x^3}$. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei f este:

$\boxed{A}$ $\frac{\pi}{3}(\mathrm{e}^2 - 1)$; $\boxed{B}$ $\frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2 - 1)$; $\boxed{C}$ $\frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2 + 1)$; $\boxed{D}$ $\frac{\pi}{3}(\mathrm{e}^2 + 1)$;

$\boxed{E}$ $\frac{\pi}{6}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\right)$.

Varianta 25

1. (3p) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică, astfel încât $a_5 + a_{10} = 1$. Valoarea numărului $a_1 + a_3 + a_{12} + a_{14}$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ 2; $\boxed{C}$ 3; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ 5.

2. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Valoarea sumei $S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2024)$ este:

$\boxed{A}$ $2024 \cdot 2022$; $\boxed{B}$ $2024 \cdot 2021$; $\boxed{C}$ $2025 \cdot 2021$;
$\boxed{D}$ $2025 \cdot 2023$; $\boxed{E}$ $2024 \cdot 2020$.

3. (3p) Pe mulţimea $(0, +\infty)$ se consideră legea de compoziţie asociativă $x*y = x^{\log_2 y}$. Valoarea expresiei $E = \frac{1}{2024}*\frac{1}{2023}*\cdots*\frac{1}{2}*1*2*3*\cdots*2024$ este:

$\boxed{A}$ $E = 1$; $\boxed{B}$ $E = \frac{1}{2024}$; $\boxed{C}$ $E = \frac{1}{1012}$; $\boxed{D}$ $E = 1012$;
$\boxed{E}$ $E = 2$.

4. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 \cdot e^x$. Mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei f este:

$\boxed{A}$ $\{2, 4\}$; $\boxed{B}$ $\{1, 3\}$; $\boxed{C}$ $\{1, 2\}$; $\boxed{D}$ $\{3\}$; $\boxed{E}$ $\{1\}$.

5. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+1}{3^k}$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{B}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{C}$ $\frac{1}{9}$; $\boxed{D}$ $\frac{2}{9}$; $\boxed{E}$ $\frac{9}{4}$.

6. (3p) Valoarea numărului $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ este:

$\boxed{A}$ 2; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{D}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{E}$ $2\sqrt{2}$.

7. (3p) Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$ este:

$\boxed{A}$ 13; $\boxed{B}$ 7; $\boxed{C}$ 12; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ 8.

8. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$ este:

[A] $\ln\sqrt{2}$; [B] 1; [C] $\ln 2$; [D] $2\ln\sqrt{2}$; [E] $+\infty$.

9. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+4x+4}\mathrm{d}x$ este :

[A] $\ln\frac{3}{2}-\frac{29}{6}$; [B] $12\cdot\ln\frac{3}{2}-\frac{29}{6}$; [C] $-12\cdot\ln\frac{3}{2}+\frac{29}{6}$;
[D] $6\cdot\ln\frac{3}{2}-\frac{19}{6}$; [E] $\ln\frac{19}{6}-\frac{3}{2}$.

10. (3p) Dacă $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, atunci matricea $A(5)\cdot A(-7)\cdot A(3)$ este:

[A] $\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{pmatrix}$; [B] $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$; [C] $\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$;
[D] $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$; [E] $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

11. (3p) Se consideră polinomul $f=X^4-3X^3+X+7$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4. Valoarea expresiei

$$E=\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}+\frac{1}{2-x_4}$$

este:

[A] $E=-3$; [B] $E=2$; [C] $E=3$; [D] $E=-5$;
[E] $E=-4$.

12. (3p) Se consideră ΔABC, în care $BC=6$, $\widehat{B}=\frac{3\pi}{4}$ şi $\widehat{C}=\frac{\pi}{12}$. Lungimea razei cercului circumscris triungiului ABC este:

[A] 3; [B] 6; [C] 4; [D] $2\sqrt{2}$; [E] $3\sqrt{3}$.

13. (3p) Valoarea numărului

$\log_{2024}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_{2024}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{2024}\left(1-\frac{1}{2024}\right)$ este:

A 1; B 0; C $\log_{2024}\frac{2023}{1012}$; D -1; E $\dfrac{1}{2}$.

14. (3p) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică, având termeni strict pozitivi şi raţia egală cu 2024. Valoarea sumei

$$S=\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_3}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{2023}+a_{2024}}{a_{2024}+a_{2025}} \text{ este:}$$

A $S=\dfrac{2024}{2025}$; B $S=\dfrac{2023}{2025}$; C $S=\dfrac{2023}{2024}$;
D $S=\dfrac{1011}{1012}$; E $S=\dfrac{2021}{2024}$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ este:

A 1; B 2; C -1; D -2; E 4.

16. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_3^6 \frac{x^2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}\mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{3}{10}+\ln\dfrac{16}{25}$; B $-\dfrac{3}{10}+\ln\dfrac{16}{25}$; C $\dfrac{3}{10}+\ln\dfrac{64}{25}$;
D $-\dfrac{3}{10}+\ln\dfrac{8}{125}+4\ln 4$; E $-\dfrac{3}{10}+\ln\dfrac{64}{25}+4\ln 4$.

17. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,a)$, $B(2,2)$ şi $C(-1,-7)$. Valoarea numărului real a pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare, este:

A $a=-8$; B $a=-9$; C $a=-10$; D $a=-\dfrac{17}{2}$;
E $a=-\dfrac{19}{2}$.

18. (3p) Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y+z=2\\ x+2y-z=3.\\ 2x+y+z=9\end{cases}$ Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluţia unică a sistemului, atunci suma $x_0+y_0+z_0$ are valoarea:

A 4; B 7; C 8; D 10; E 3.

19. (3p) Valoarea numărului real pozitiv m, pentru care modulul numărului complex $z = 3 + m \cdot i$ este egal cu 5, este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 5.

20. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$. Suma valorilor extreme ale funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $4+\sqrt{6}$; $\boxed{\text{B}}$ 10; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{6}$; $\boxed{\text{E}}$ $4+3\sqrt{6}$.

21. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

22. (3p) Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3. Valorile numerelor reale a şi b, pentru care rădăcinile polinomului sunt în progresie aritmetică şi este adevărată egalitatea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1, b = 2$; $\boxed{\text{B}}$ $a = -1, b = 3$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 1, b = -2$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 1, b = 3$; $\boxed{\text{E}}$ $a = 2, b = 3$.

23. (3p) Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(10x - \dfrac{3}{x}\right) \cdot \ln x$. Aria suprafeţei plane mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = \mathrm{e}^2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{3\mathrm{e}^4+7}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3\mathrm{e}^4-7}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{15\mathrm{e}^4-7}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{5\mathrm{e}^4+7}{2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{5\mathrm{e}^4-7}{2}$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Valorile numerelor a şi b, pentru care dreapta de ecuaţie $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f şi $x = 1$ este punct de extrem pentru f, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1, b = 4$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 2, b = -2$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 2, b = 4$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = 2, b = -1$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -2, b = 1$.

25. (3p) Valoarea sumei $S = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2024} \log_2 k^2} + \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2024} \log_3 k^2} + \cdots + \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2024} \log_{2024} k^2}$ este:

A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{2024}$; C 1; D $\frac{1}{3}$; E $\frac{1}{1012}$.

26. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{u} = 6\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} + 48\vec{j}$. Măsura, în radiani, a unghiului format de cei doi vectori, este:

A 0; B $\frac{\pi}{4}$; C $\frac{\pi}{3}$; D $\frac{\pi}{2}$; E $\frac{\pi}{6}$.

27. (3p) Pe $(0, +\infty)$ se consideră legea de compoziţie asociativă $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Valoarea expresiei $E = \dfrac{\left(1 * \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) \cdots \cdot \left(\frac{1}{2023} * \frac{1}{2024}\right)}{(1 * 2) \cdot (3 * 4) \cdots \cdot (2023 * 2024)}$ este:

A $E = 0$; B $E = 7$; C $E = 56$; D $E = 15$;
E $E = 1$.

28. (3p) Fie $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{(x+1)(x+2)} \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n \to \infty} n(\ln 2 - I_n)$ este:

A 2; B 1; C 3; D 0; E $\frac{1}{2}$.

29. (3p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ este:

A $+\infty$; B $-\infty$; C 3; D -1; E 1.

30. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + x$, este:

A $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 + 3\right)$; B $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5\right)$; C $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1\right)$;
D $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 4\right)$; E $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 3\right)$.

Varianta 26

1. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \cos \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ 5.

2. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor reale ale inecuaţiei $\dfrac{2-x}{x+1} \geq \dfrac{3-x}{x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(-2,-1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(0,1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-1,0)$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$;
$\boxed{\text{E}}$ $(-\infty,-1)$.

3. (3p) Dacă $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{8}$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos\alpha$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

4. (3p) Derivata $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2e^x \sin x$; $\boxed{\text{B}}$ $e^x \cos x$; $\boxed{\text{C}}$ $e^x(\cos x - \sin x)$; $\boxed{\text{D}}$ $e^x \sin x$;

$\boxed{\text{E}}$ $2e^x \cos x$.

5. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -1.

6. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2e^{2\pi}$; $\boxed{\text{B}}$ 2π; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $e^{2\pi}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

7. (3p) Valoarea lui $(\hat{3})^{2023}$ în $\mathbb{Z}_7$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\hat{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $\hat{1}$; $\boxed{\text{C}}$ $\hat{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\hat{6}$; $\boxed{\text{E}}$ $\hat{4}$.

8. (3p) În reperul cartezian xOy, considerăm punctele $A(-2,2)$ şi $B(2,4)$. Ecuaţia mediatoarei segmentului (AB) este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = -2x + 3$; $\boxed{\text{B}}$ $y = 2x + 3$; $\boxed{\text{C}}$ $y = -2x - 3$;

D $y = 2x - 3$; E $y = -x + 3$.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

9. (3p) Matricea $A^2 - 2A$ este egală cu:

A $4I_3$; B $8I_3$; C I_3; D A; E $-2I_3$.

10. (3p) Matricea A^{-1} este egală cu:

A $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; B $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; C I_3;
D $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

11. (3p) Matricea $A^{2024} + 2A^{2023}$ este egală cu:

A $4^{2023}(A - 2I_3)$; B $2^{2023}(A - 2I_3)$; C $2^{2023}(A + 2I_3)$;
D $4^{2023}(A + 2I_3)$; E $4^{2024}(A - 2I_3)$.

12. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă şi F o primitivă a lui f cu $F(0) = -2$. Dacă $f(x) = -xF(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci valoarea lui $f'(0)$ este:

A -2; B 2; C 1; D -1; E 0.

13. (3p) Distanţa de la punctul $A(-1, 0)$ la dreapta d de ecuaţie $-5x + 12y + 8 = 0$ este:

A 0; B 2; C 13; D 10; E 1.

Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

14. (3p) Dacă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, atunci m este egal cu:

A $\frac{1}{2}$; B 0; C 1; D -1; E $-\frac{1}{2}$.

15. (3p) Determinaţi mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină număr întreg.

A $m \in \{0, 1\}$; B $m \in \{1, -3\}$; C $m \in \{1, 3\}$;

D $m \in \{0, 3\}$; E $m \in \{0, 1, 3\}$.

16. (3p) Dacă $\frac{1}{x_1^3 + x_1^2 + 1} + \frac{1}{x_2^3 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{x_3^3 + x_3^2 + 1} = 1$, atunci mulţimea tuturor valorilor reale ale lui m este:

A $m \in \mathbb{R}$; B $m \in \mathbb{R}^*$; C $m \in \{0\}$; D $m \in \emptyset$;
E $m \in \mathbb{Z}$.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiă prin $f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}$.

17. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A 1; B $\ln \frac{e}{2}$; C $\ln \frac{e^2}{2}$; D $\ln \frac{e}{\sqrt{2}}$; E $\ln \frac{\sqrt{e}}{2}$.

18. (3p) Ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f este:

A $y = 2x$; B $y = 2$; C $y = -2x$; D $y = -2x + 1$;
E $y = 0$.

19. (3p) Ştiind că funcţia $f : [0, 1] \to \left[0, \frac{3}{2}\right]$ este bijectivă, atunci valoarea integralei $\int_0^{\frac{3}{2}} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\ln 2$; B $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$; C $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$; D $-\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$;
E 0.

20. (3p) Fie numărul complex $z = \frac{4 - i}{1 + 4i}$. Valoarea lui $\log_{2024} |z|$ este:

A -1; B 2; C 1; D $\frac{1}{2}$; E 0.

21. (3p) Valoarea integralei $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos x}\mathrm{d}x$ este:

A 0; B 2; C 4; D 8; E 12.

Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = 3xy + 4x + 4y + 4$.

22. (3p) Elementul neutru al legii de compoziţie "*" pe mulţimea $\mathbb{Z}$ este:

A $e = -1$; B $e = 0$; C $e = 1$; D $e = 4$; E $e = -4$.

23. (3p) Mulţimea tuturor elementelor simetrizabile ale mulţimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "*" este:

A $\{-1\}$; B $\{-1, 0\}$; C $\{-1, 0, 1\}$; D $\{-4, -1, 4\}$; E $\{0\}$.

24. (3p) Ştiind că legea "*" este asociativă pe $\mathbb{Z}$, atunci mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei $\underbrace{x * x * x * ... * x}_{2024 \text{ ori}} = -1$ este:

A $\{-1\}$; B $\{-1, 0\}$; C $\{-1, 0, 1\}$; D $\{-4, -1, 4\}$; E $\{0\}$.

25. (3p) Valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcţiei $f(x) = x^2 + mx + m - 1$ este tangentă la axa Ox este:

A 0; B 1; C -2; D 2; E -1.

26. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x \mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; B $\dfrac{1}{4}$; C $\dfrac{1}{8}$; D 1; E 0.

27. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_3(4^{x-1} + 5) = 1 + \log_3(2^{x-1} + 1)$ este:

A $\{0, 1, 2\}$; B $\{1, 2, 3\}$; C $\{1, 2\}$; D $\emptyset$; E $\{0, 1\}$.

Se consideră funcţia $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \ln(x - 2) - 2\ln(x^2 - 4).$$

28. (3p) Valoarea derivatei $f'(3)$ este:

A $-\dfrac{7}{5}$; B $-2\ln 5$; C $\dfrac{11}{5}$; D 1; E $\ln 5$.

29. (3p) Imaginea intervalului $(2, \infty)$ prin funcţia f, $\mathrm{Im} f = f((2, \infty))$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(2, \infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $(0, \infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty, 0)$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ $\mathbb{R}^*$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2) f(x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Varianta 27

1. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x-2}+2=x$ este:

A $\{2,10\}$; B $\{0,1,2,3\}$; C $\{0,1,2\}$; D $\{2,3,10\}$; E $\{1,2,3\}$.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiă prin $f(x)=x^{2023}\sin(x^{2024})$.

2. (3p) Valoarea derivatei $f'(0)$ este:

A 2024; B 2023; C 0; D 1; E 2021.

3. (3p) Fie F primitiva funcţiei f ce verifică $F(0)=-\dfrac{1}{2024}$. Atunci valoarea lui $F(\sqrt[2024]{\pi})$ este:

A $\dfrac{1}{2023}$; B $\dfrac{1}{2024}$; C $-\dfrac{1}{2024}$; D $-\dfrac{1}{2025}$; E $-\dfrac{1}{2023}$.

4. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^{2024}}$ este:

A 2024; B $\dfrac{1}{2}$; C 2; D 1; E 0.

5. (3p) Numărul termenilor iraţionali în dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{17}\right)^{15}$ este:

A 13; B 12; C 14; D 6; E 3.

6. (3p) Dacă $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3^x+a^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=3\sqrt{2}$, unde $a>0$, atunci valoarea lui a este:

A $3\sqrt{2}$; B $2\sqrt{2}$; C 2; D 3; E 6.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x^2+mx+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

7. (3p) Mulţimea valorilor lui m pentru care f este descrescătoare pe intervalul $[-2,2]$ este :

A $(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$; B $[-4,4]$; C $(-4,4)$;

D $(-\infty, -4]$; E $(4, \infty)$.

8. (3p) Mulţimea valorilor lui m pentru care f este injectivă pe intervalul $[-2, 2]$ este :

A $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$; B $[-4, 4]$; C $(-4, 4)$;
D $(-\infty, -4]$; E $(4, \infty)$.

9. (3p) Dacă $\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci valoarea lui $\sin a - \cos a$ este egală cu:

A $\sqrt{2}$; B $\frac{1}{\sqrt{2}}$; C 0; D $\sqrt{2}$; E $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pe mulţimea $[0, \infty)$ se consideră legea de compoziţie

$$x \circ y = \log_{15}(15^x + 15^y - 1).$$

10. (3p) Elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea $[0, \infty)$ este:

A $e = 2$; B $e = 0$; C $e = 15$; D $e = 1$;
E $e = \frac{1}{2}$.

11. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor $x \in [0, \infty)$ ale ecuaţiei

$$\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{16 \text{ ori } x} = 2x,$$

este:

A $\{0\}$; B $\{2\}$; C $\{0, 1, 2\}$; D $\{1, 2\}$; E $\{0, 1\}$.

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x(x^3 + 4)}.$$

12. (3p) Atunci, funcţia f:

A este descrescătoare pe $(0, \infty)$; B este crescătoare pe $(0, \infty)$;
C este negativă pe $(0, \infty)$; D nu este monotonă pe $(0, \infty)$;
E nu este continuă pe $(0, \infty)$.

13. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} x^5 f'(x)$ este:

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 4; $\boxed{C}$ -4; $\boxed{D}$ ∞; $\boxed{E}$ 1.

14. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{A}$ $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{1}{3}$; $\boxed{B}$ $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{10}{3}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{1}{12}\ln 5$; $\boxed{D}$ 1; $\boxed{E}$ 0.

Se consideră polinomul

$$f = X^4 + (m-1)X^3 + (m-1)X + 1,$$

unde $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

15. (3p) Valoarea expresiei $E = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ este:

$\boxed{A}$ $2(m-1)$; $\boxed{B}$ 0; $\boxed{C}$ $m-1$; $\boxed{D}$ 2; $\boxed{E}$ $m+1$.

16. (3p) Dacă $m = 2$, atunci $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |x_k|$ este:

$\boxed{A}$ 2; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ 6; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ 8.

17. (3p) Mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$ este:

$\boxed{A}$ $\emptyset$; $\boxed{B}$ $\{2\}$; $\boxed{C}$ $\{0, 2\}$; $\boxed{D}$ $\{0\}$; $\boxed{E}$ $\mathbb{R}$.

18. (3p) Valoarea expresiei $E = \sin\dfrac{2023\pi}{3} + \cos\dfrac{2024\pi}{3}$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ 0; $\boxed{C}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; $\boxed{E}$ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

19. (3p) Suma $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{2024} \frac{1}{\log_k 2 + \log_k 3 + \log_k 4 + ... + \log_k 2024}$ este:

$\boxed{A}$ $S = \ln 2$; $\boxed{B}$ $S = 4$; $\boxed{C}$ $S = 2$; $\boxed{D}$ $S = 1$;
$\boxed{E}$ $S = 0$.

20. (3p) Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 16}$. Imaginea intervalului $[0, \infty)$ prin funcţia f, $\mathrm{Im} f = f([0, \infty))$ este:

A $\left[0, \frac{1}{12}\right]$; B $[0,1]$; C $[0,2]$; D $\left[0, \frac{1}{24}\right]$;
E $\left[0, \frac{2}{25}\right]$.

21. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+16}\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{12}\ln\frac{17}{16}$; B $\frac{1}{12}\ln\frac{16}{15}$; C $\frac{1}{3}\ln\frac{17}{16}$; D 1; E 0.

22. (3p) Valoarea expresiei $E = \frac{1}{i^{2021}} + \frac{1}{i^{2022}} + \frac{1}{i^{2023}} + \frac{1}{i^{2024}}$ este:

A $E=-1$; B $E=0$; C $E=i$; D $E=-i$;
E $E=1$.

23. (3p) Suma $S = C_{4n}^0 - 2C_{4n}^1 + 4C_{4n}^2 - 8C_{4n}^3 + ... + 2^{4n}C_{4n}^{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este egală cu:

A $S=-1$; B $S=2$; C $S=-2$; D $S=0$;
E $S=1$.

24. (3p) Valoarea negativă a lui m pentru care vectorii $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = m^2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari, este:

A $m=-2$; B $m=-\sqrt{3}$; C $m=\pm\sqrt{2}$;
D $m=-\sqrt{2}$; E $m=-1$.

25. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x\mathrm{arctg}(x^2)$. Ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funţiei f este:

A $y=\frac{\pi}{2}x-2$; B $y=\frac{\pi}{2}$; C $y=\frac{\pi}{2}x$; D $y=\frac{\pi}{2}x+2$;
E graficul funcţiei f nu admite asimptote spre $+\infty$.

26. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 x\mathrm{arctg}(x^2)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{8}(\pi-\ln 4)$; B $\frac{1}{8}(\pi-\ln 2)$; C $\frac{\pi}{4}-\ln 4$; D 1;
E $\pi-\ln 2$.

27. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei $9^{\sqrt[3]{x-1}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[3]{x-1}} + 3 = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1,2,3\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1,2,9\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1,2\}$.

28. (3p) Raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $AC = 3\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle B) = 60^o$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $R = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $R = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $R = 3$; $\boxed{\text{D}}$ $R = 4$;
$\boxed{\text{E}}$ $R = 5$.

29. (3p) Valoarea determinatului $\begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m+2 \\ m+2 & m+1 & m \end{vmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$, este:

$\boxed{\text{A}}$ m; $\boxed{\text{B}}$ $3m$; $\boxed{\text{C}}$ m^3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $-m$.

30. (3p) Mulţimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1,2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{0,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-2,2\}$.

Varianta 28

1. (3p) Modulul numărului complex $(1-i)^{2024}+(1+i)^{2024}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2^{2013}; $\boxed{\text{B}}$ 2^{2024}; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2^{2012}; $\boxed{\text{E}}$ 2^{4048}.

Se consideră ecuaţia $x^3+ax+b=0$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

2. (3p) Valoarea determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ a; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $-a$; $\boxed{\text{E}}$ b.

3. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei, pentru pentru $a=-3$ şi $b=-2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1,1,2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-1,2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1,2\}$.

4. (3p) Dacă $x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $a+b^2=1$; $\boxed{\text{B}}$ $a+b^2=-1$; $\boxed{\text{C}}$ $a+b^2=0$;
$\boxed{\text{D}}$ $a+b^2=2$; $\boxed{\text{E}}$ $a+b^2=-2$.

5. (3p) Probabilitatea ca un număr $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să fie soluţia ecuaţiei $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)=0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{4}{5}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

6. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei
$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{6}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{3,9\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{1}{3},9\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{1}{9},3\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $\{3\}$.

7. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuaţia $x^2-mx+1=0$ are două rădăcini reale şi distincte este:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $[-2,2]$; $\boxed{\text{C}}$ $(-2,2)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(-\infty,2]$; $\boxed{\text{E}}$ $(-2,\infty)$.

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x * y = x + y + 2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

8. (3p) Elementul neutru al legii de compoziţie "$*$" este:

$\boxed{\text{A}}$ $e = 2$; $\boxed{\text{B}}$ $e = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $e = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $e = -1$;
$\boxed{\text{E}}$ $e = -2$.

9. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor naturale ale ecuaţiei

$$C_n^0 * C_n^1 * C_n^2 * ... * C_n^n = 2n + 32 \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ $n \in \{5, 7\}$; $\boxed{\text{B}}$ $n \in \{3, 7\}$; $\boxed{\text{C}}$ $n \in \{3, 5, 7\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $n \in \{5\}$; $\boxed{\text{E}}$ $n \in \{7\}$.

Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi sistemul } \begin{cases} -x + 2y + z = m \\ x + y + mz = -m \\ -x + y + z = m \end{cases},\ m \in \mathbb{R}.$$

10. (3p) Valoarea determinatului $det(A)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-m - 1$; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $m + 1$; $\boxed{\text{E}}$ m.

11. (3p) Ştiind că sistemul are soluţia unică $(2024, 0, 0)$, atunci valoarea lui m este:

$\boxed{\text{A}}$ $m = 2024$; $\boxed{\text{B}}$ $m = -2024$; $\boxed{\text{C}}$ $m = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $m = 1$;
$\boxed{\text{E}}$ $m = -1$.

Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale, cu termenul $a_5 = 4\sqrt{3}$.

12. (3p) Dacă raţia progresiei aritmetice este egală cu $\sqrt{3} - 1$, atunci primul termen al progresiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $a_1 = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a_1 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $a_1 = 2$; $\boxed{\text{D}}$ $a_1 = -2$;
$\boxed{\text{E}}$ $a_1 = 4$.

13. (3p) Ştiind că $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 66\sqrt{3}$, atunci raţia progresiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $r = \sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $r = \sqrt{3} - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $r = 3\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $r = 2\sqrt{3}$;
$\boxed{\text{E}}$ $r = \sqrt{3} + 1$.

14. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2+1}$. Valoarea derivatei $f''(-1)$ este

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -2; $\boxed{\text{E}}$ 1.

15. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2-\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $2-\ln 2-\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $2+\ln 2-\dfrac{\pi}{2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $2-\ln 2+\dfrac{\pi}{2}$.

16. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \ln \frac{x^2}{x^2+1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ e.

17. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{4-x^2}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$; $\boxed{\text{B}}$ $3\sqrt[3]{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt[3]{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\sqrt[3]{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

18. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Valoarea minimă a funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

19. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Numărul asimptotelor la graficul funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

20. (3p) Punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x=-2$ punct de maxim, $x=0$ punct de minim;
$\boxed{\text{B}}$ $x=-2$ punct de maxim, $x=-3$ punct de minim;
$\boxed{\text{C}}$ $x=-3$ şi $x=-2$ puncte de maxim, $x=0$ punct de minim;
$\boxed{\text{D}}$ $x=-2$ şi $x=-3$ puncte de maxim;

$\boxed{\text{E}}$ $x = 0$ şi $x = -3$ puncte de minim.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 1 & x > 0. \end{cases}$

21. (3p) Valoarea derivatei $f'(0)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ f nu este derivabilă în $x = 0$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 4;
$\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

22. (3p) Fie F primitiva funcţiei f ce verifică $F(0) = \dfrac{1}{2}$. Atunci $F(1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{e^2}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{23}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{10}{3}$.

23. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (t - \arcsin t)\mathrm{d}t}{x^4}$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{12}$; $\boxed{\text{B}}$ $-\dfrac{1}{12}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\dfrac{1}{24}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{6}$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^2 - 2x + 1$. Valoarea expresiei $f'(1) + f(1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -1.

25. (3p) Valoarea integralei $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sin^3 x \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{32}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{16}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{64}$.

26. (3p) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ \ln x, & \text{dacă } x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

să fie derivabilă pe domeniul ei de definiţie:
$\boxed{\text{A}}$ $a = 1, b = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 0, b = -1$; $\boxed{\text{C}}$ $a = 1, b = -2$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = -1, b = 0$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -1, b = 2$.

27. (3p) Ştiind că $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci valoarea lui $\sin(2\alpha)$ este:

A $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; B $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D $\frac{1}{2}$; E 0.

28. (3p) Ecuaţia dreptei d_1 care trece prin punctul $A(1,2)$ şi este perpendiculară pe dreapta d_2 de ecuaţie $x + 2y - 2 = 0$ este:

A $d_1 : 2x - y = 0$; B $d_1 : 2x + y - 4 = 0$;
C $d_1 : x - 2y + 3 = 0$; D $d_1 : x - y + 1 = 0$;
E $d_1 : 2x - 2y + 2 = 0$.

29. (3p) Vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(0,2)$, $B(a,1)$ şi $C(3,b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi aria triunghiului ABC ştiind că centrul său de greutate este $G\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$:

A $\frac{1}{2}$; B 5; C $\frac{5}{2}$; D $\frac{3}{2}$; E 3.

30. (3p) Distanţa de la punctul $A(1,2)$ la dreapta d de ecuaţie $-3x + 4y + 2 = 0$ este:

A $\frac{7}{5}$; B $\frac{9}{5}$; C $\frac{1}{5}$; D 2; E 3.

Varianta 29

1. (3p) Valoarea expresiei $E = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2024}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{C}}$ $1-i\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $1+i\sqrt{3}$;
$\boxed{\text{E}}$ 2^{2024}.

2. (3p) Valoarea expresiei $\dfrac{C_{n+2}^2 \cdot P_2 - A_{n+2}^2}{P_2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este:

$\boxed{\text{A}}$ n; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $n+2$; $\boxed{\text{D}}$ $n!$; $\boxed{\text{E}}$ $(n+2)!$.

3. (3p) Suma $S = \widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{5} + ... + \widehat{15}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{16}, +)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\widehat{15}$; $\boxed{\text{B}}$ $\widehat{7}$; $\boxed{\text{C}}$ $\widehat{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\widehat{1}$; $\boxed{\text{E}}$ $\widehat{0}$.

Se consideră ecuaţia $x^3 - 6x^2 + (2m-1)x - m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

4. (3p) Ştiind că $x_1 = 1$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{3} |x_i|$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 6.

5. (3p) Valoarea expresiei $2x_1x_2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2m-1$; $\boxed{\text{B}}$ $4m-1$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

6. (3p) Ştiind că rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică, atunci valoarea reală a lui m este:

$\boxed{\text{A}}$ $m = 4$; $\boxed{\text{B}}$ $m = 6$; $\boxed{\text{C}}$ $m = -2$; $\boxed{\text{D}}$ $m = 1$;
$\boxed{\text{E}}$ $m = 0$.

Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + cy + z = 1. \end{cases}$

7. (3p) Valoarea determinantului $det(A(a,b,c))$ este:

$\boxed{A}$ $b+c$; $\boxed{B}$ $a+b+c$; $\boxed{C}$ $b-c$; $\boxed{D}$ $a+b-c$;
$\boxed{E}$ $a+c$.

8. **(3p)** Determinaţi mulţimea tuturor valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a,2,3)$ este inversabilă.

$\boxed{A}$ $a \in \emptyset$; $\boxed{B}$ $a \in \mathbb{R}$; $\boxed{C}$ $a \in \mathbb{R}^*$; $\boxed{D}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
$\boxed{E}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

9. **(3p)** Ştiind că (x,y,z) este soluţia unică a sistemului, atunci $x+y+z$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ 3; $\boxed{C}$ -1; $\boxed{D}$ 0; $\boxed{E}$ 4.

10. **(3p)** Suma tuturor soluţiilor ecuaţiei $\log_2^4 x - 17\log_2^2 x + 6 = 0$, este:

$\boxed{A}$ $\frac{1}{16}$; $\boxed{B}$ $\frac{297}{16}$; $\boxed{C}$ 1; $\boxed{D}$ $\frac{25}{16}$; $\boxed{E}$ $-\frac{1}{16}$.

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie dată de $x * y = (x-3)(y-3)+3$.

11. **(3p)** Elementul neutru al legii de compoziţie "$*$" pe mulţimea $\mathbb{R}$ este:

$\boxed{A}$ $e=-1$; $\boxed{B}$ $e=0$; $\boxed{C}$ $e=1$; $\boxed{D}$ $e=3$;
$\boxed{E}$ $e=4$.

12. **(3p)** Simetricul elementului $x=2$ în raport cu legea de compoziţie "$*$" este:

$\boxed{A}$ -1; $\boxed{B}$ 2; $\boxed{C}$ 3; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ 0.

13. **(3p)** Ştiind că legea de compoziţie "$*$" este asociativă, atunci valoarea expresiei $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \sqrt{3} * \ldots * \sqrt{2024}$ este:

$\boxed{A}$ 3; $\boxed{B}$ $\sqrt{2024}$; $\boxed{C}$ 4; $\boxed{D}$ 2; $\boxed{E}$ 0.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5+1}$.

14. **(3p)** Valoarea integralei $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{2}$; B $\frac{\pi}{20}$; C $\frac{\ln 2}{5}$; D $\ln 2$; E 1.

15. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{f(x)+x^5 f(x)}{x^{10}+1}\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{2}$; B $\frac{\pi}{20}$; C $\frac{\ln 2}{5}$; D $\ln 2$; E 1.

16. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ este:

A $\frac{16}{33}$; B $\frac{1}{33}$; C 16; D 1; E $\ln 2$.

17. (3p) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^4-1$. Mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei $-f''(x)+f'(x)+f(x)=e^x-1$ este:

A $\{0,2,3\}$; B $\{-6,0,2\}$; C $\{0,1\}$; D $\emptyset$; E $\{1\}$.

18. (3p) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^4-1$. Atunci:

A f este crescătoare pe $\mathbb{R}$; B f este pară; C f este impară;
D f este convexă pe $\mathbb{R}$; E f este concavă pe $\mathbb{R}$.

19. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui m, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+mx+2024$ este injectivă, este:

A $(-\infty,0)$; B $[0,\infty)$; C $\{-1\}$; D $\emptyset$; E $\mathbb{R}$.

20. (3p) Valoarea integralei $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{2}$; B $\ln 2$; C 0; D 1; E $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

21. (3p) Valoarea derivatei $f'(e^2)$ este:

A 0; B $-\frac{e}{2}$; C $\frac{e}{2}$; D $-\frac{2}{e}$; E $\frac{e^2}{2}$.

22. (3p) Imaginea intervalului $(0,\infty)$ prin funcţia f, $\mathrm{Im}f=f((0,\infty))$ este:

A $\left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$; B $(0, \infty)$; C $\left[\frac{2}{e}, \infty\right)$; D $\mathbb{R}$;
E $\left(0, \frac{2}{e}\right]$.

23. (3p) Folosind intervalele de monotonie ale funcţiei f, să se precizeze care dintre următoarele inegalităţi este adevărată:

A $5^{\sqrt{7}} < 7^{\sqrt{5}}$; B $2^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{2}}$; C $8^{\sqrt{11}} < 11^{\sqrt{8}}$;
D $4^{\sqrt{5}} > 5^2$; E $10^{\sqrt{11}} < 11^{\sqrt{10}}$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ x+1, & x \in [0, 2] \\ 2x-2, & x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Care din următoarele funcţii este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$?

A $\begin{cases} e^x - 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x + 5, & x \in [2, \infty); \end{cases}$ B $\begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x, & x \in [2, \infty); \end{cases}$

C $\begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x - 1, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x + 5, & x \in [2, \infty); \end{cases}$ D $\begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x + 1, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x + 4, & x \in [2, \infty); \end{cases}$

E $\begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x + 1, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x + 5, & x \in [2, \infty). \end{cases}$

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ este:

A 1; B $\frac{1}{2}$; C 0; D ∞; E e.

26. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$ este:

A 1; B $\frac{1}{2}$; C 0; D ∞; E e.

27. (3p) Dacă $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci valoarea lui $\sin \alpha$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{C}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{E}$ 0.

28. (3p) Valoarea reală a lui m pentru care vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - m\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ sunt coliniari, este:

$\boxed{A}$ $\frac{4}{3}$; $\boxed{B}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{C}$ $-\frac{4}{3}$; $\boxed{D}$ $-\frac{2}{3}$; $\boxed{E}$ 3.

29. (3p) În triunghiul ABC se cunosc lungimile laturilor $BC = 7$, $AB = 3$ şi $AC = 5$. Atunci valoarea lui $\cos(\sphericalangle A)$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{B}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{C}$ $\frac{3}{5}$; $\boxed{D}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{E}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30. (3p) Valoarea expresiei $E = \sin\frac{2023\pi}{4} + \cos\frac{2025\pi}{4}$ este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ $-\sqrt{2}$; $\boxed{C}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{D}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{E}$ 0.

Varianta 30

1. (3p) Dacă z este o rădăcină a ecuaţiei $z^2 - 4z + 6 = 0$, atunci $|z|$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{6}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 24; $\boxed{\text{E}}$ 1.

2. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe a^4 din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{2}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{C_{13}^4}{2^6}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{C_{13}^5}{2^6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{C_{13}^6}{2^7}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{C_{13}^6}{2^6}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{C_{13}^3}{2^7}$.

3. (3p) Valoarea deteriminantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{vmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $4i$; $\boxed{\text{B}}$ $-4i$; $\boxed{\text{C}}$ $2i$; $\boxed{\text{D}}$ $-2i$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.

4. (3p) Suma $\sum_{k=1}^{3} |y_k|$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

5. (3p) Câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g sunt:

$\boxed{\text{A}}$ Câtul X şi restul 1; $\boxed{\text{B}}$ câtul X^2 şi restul -1;
$\boxed{\text{C}}$ câtul X şi restul -1; $\boxed{\text{D}}$ câtul X^2 şi restul 1; $\boxed{\text{E}}$ alt răspuns.

6. (3p) Valoarea expresiei $E = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $E = 2$; $\boxed{\text{B}}$ $E = -1$; $\boxed{\text{C}}$ $E = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $E = \frac{1}{2}$;
$\boxed{\text{E}}$ $E = -2$.

7. (3p) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_2 = 0$ şi $a_5 = -6$, atunci raţia progresiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $r = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $r = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $r = -2$; $\boxed{\text{D}}$ $r = -1$;
$\boxed{\text{E}}$ $r = -3$.

8. (3p) Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x + 2 = 0$, atunci valoarea expresiei $x_1^3 + x_2^3$ este:

A -5; B -4; C 1; D 3; E 0.

9. (3p) Mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-x+4}$ este:

A $(-\infty, -1]$; B $[1, \infty)$; C $[0, 1]$; D $[0, \infty)$;
E $\emptyset$.

10. (3p) Numărul submulţimilor lui $\mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$ cu proprietatea că suma elementelor fiecărei submulţimi este egală cu $\widehat{0}$ este:

A 0; B 1; C 2; D 3; E 4.

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie dată de $x * y = 4(x-1)(y-1) + 1$.
11. (3p) Elementul neutru al legii de compoziţie "*" pe mulţimea $\mathbb{R}$ este:

A $e = \frac{1}{4}$; B $e = 1$; C $e = 4$; D $e = \frac{5}{4}$;
E $e = 0$.

12. (3p) Mulţimea tuturor numerelor reale x care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea de compoziţie "$*$" este:

A $\left\{\frac{1}{4}\right\}$; B $\left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$; C $\left\{1, \frac{1}{4}\right\}$; D $\left\{0, \frac{5}{4}\right\}$;
E $\left\{0, 1, \frac{1}{4}\right\}$.

13. (3p) Ştiind că legea de compoziţie "$*$" este asociativă, atunci valoarea expresiei $\frac{1}{1012} * \frac{2}{1012} * \frac{3}{1012} * ... * \frac{2024}{1012}$ este:

A 1; B 2024; C $\frac{5}{4}$; D $\frac{1}{4}$; E 1012.

14. (3p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 6$. Abscisa punctului de intersecţie a graficului funcţiei $f \circ f$ cu axa Ox este:

A $\frac{1}{2}$; B 3; C -3; D $-\frac{1}{2}$; E $\frac{3}{2}$.

15. (3p) Valoarea limitei $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x + 5^x}{2^x - 5^{x+1}}$ este:

A $-\frac{1}{5}$; B $\frac{3}{2}$; C -1; D 0; E ∞.

16. (3p) Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{5}{x}}$. Asimptota la graficul funcţiei f spre $+\infty$ este:

A $y = x$; B $y = x + 5$; C $y = x + 1$; D $y = 5x$; E $y = 5$.

17. (3p) Valoarea integralei $I = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{e^x + 2x + 2} \mathrm{d}x$ este:

A $\ln 3$; B $\ln 2$; C $1 - \ln 3$; D $-\ln 3$; E $-\ln 2$.

18. (3p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{3x} - 1, & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 + ax + b, & x \in [0, \infty). \end{cases}$
Determinaţi parametrii reali m şi n astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

A $a = \frac{1}{e}$, $b = -\frac{3}{e}$; B $a = \frac{1}{e}$, $b = \frac{2}{e}$; C $a = \frac{1}{e}$, $b = \frac{1}{e}$; D $a = \frac{2}{e}$, $b = \frac{1}{e}$; E $a = \frac{3}{e}$, $b = \frac{1}{e}$.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiă prin $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 4}$.

19. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{2} + \ln 5$; B $\ln \frac{4}{5}$; C $\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{2} - \ln \frac{5}{4}$; E $-\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{5}$.

20. **(3p)** Ştiind că funcţia $f : [0,1] \to \left[0, \frac{3}{5}\right]$ este bijectivă, atunci valoarea integralei $\int_0^{\frac{3}{5}} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{10} + \ln\frac{5}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{10} + \ln\frac{4}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{10}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{10} - \ln\frac{5}{4}$;
$\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{2} + \ln\frac{4}{5}$.

21. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\right)^{\sqrt[4]{x}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ e^2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ e^{-2}; $\boxed{\text{E}}$ e.

22. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă şi F o primitivă a lui f cu $F(-1) = 2$. Dacă $f(x) = 3(x+1)F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci valoarea lui $f'(-1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -3; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

23. **(3p)** Punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x = 0$ punct de minim, $x = -\frac{2}{3}$ punct de maxim;
$\boxed{\text{B}}$ $x = -1$ punct de maxim, $x = -\frac{2}{3}$ punct de minim;
$\boxed{\text{C}}$ $x = -1$ şi $x = 0$ puncte de minim, $x = -\frac{2}{3}$ punct de maxim;
$\boxed{\text{D}}$ $x = -1$ şi $x = -\frac{2}{3}$ puncte de maxim;
$\boxed{\text{E}}$ $x = 0$ şi $x = -\frac{2}{3}$ puncte de minim.

24. **(3p)** Fie $f : (5,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+5}{x-5}$. Valoarea derivatei $f'(15)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{10}$; $\boxed{\text{B}}$ $-\frac{1}{20}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{15}$; $\boxed{\text{D}}$ 10; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{15}$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x - 3$.

25. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ este:

$\boxed{A}$ $-\infty$; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ -3; $\boxed{D}$ 0; $\boxed{E}$ 4.

26. (3p) Numărul asimptotelor la graficul funcţiei f este:

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ 1; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 3; $\boxed{E}$ 4.

27. (3p) Valoarea expresiei $E = \dfrac{\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}}$ este:

$\boxed{A}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{B}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{E}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

28. (3p) În $\triangle ABC$ avem $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + \vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Lungimea laturii BC este:

$\boxed{A}$ $5\sqrt{2}$; $\boxed{B}$ $2\sqrt{5}$; $\boxed{C}$ $5\sqrt{3}$; $\boxed{D}$ 10; $\boxed{E}$ 0.

29. (3p) Ecuaţia dreptei d_1 ce trece prin punctul $A(0,1)$ şi este paralelă cu dreapta $d_2 : 3x + 6y + 2 = 0$ este:

$\boxed{A}$ $x + 2y - 1 = 0$; $\boxed{B}$ $x + 2y - 2 = 0$; $\boxed{C}$ $-x + 2y + 2 = 0$;
$\boxed{D}$ $x + y - 1 = 0$; $\boxed{E}$ $2x + 2y - 2 = 0$.

30. (3p) Raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AC = 4$ şi $m(\sphericalangle B) = 30^o$, este:

$\boxed{A}$ 1; $\boxed{B}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ 4; $\boxed{E}$ 6.

Varianta 31

1. (3p) Se consideră ecuaţia $x^2+3x+a=0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $2x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie aritmetică este:

$\boxed{\text{A}}$ 18; $\boxed{\text{B}}$ -9; $\boxed{\text{C}}$ 9; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ -18.

2. (3p) Mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vârfurile parabolelor asociate funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 1$ se găsesc pe prima bisectoare este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-2, 2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-2, 0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-2\}$.

3. (3p) Numărul funcţiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, cu proprietatea $f(1) = f(2)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 50; $\boxed{\text{C}}$ 80; $\boxed{\text{D}}$ 125; $\boxed{\text{E}}$ 60.

4. (3p) Suma rădăcinilor reale ale ecuaţiei $\log_2(x^2+5)+2 = 4\log_4(5x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{\dfrac{21}{20}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{20}$; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{\dfrac{20}{21}}$; $\boxed{\text{E}}$ $2\sqrt{20}$.

5. (3p) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$verifică relaţia: $2z + (1+i\sqrt{3})\overline{z} = 0$, atunci valoarea lui $\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^6$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $-i$; $\boxed{\text{C}}$ i; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $3i$.

6. (3p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Valoarea lui $\det(A^2 - 9A + 5I_2)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -5^4; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 5^3; $\boxed{\text{E}}$ 5.

7. (3p) Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ -x + y - mz = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

este incompatibil este:

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{0, \dfrac{3}{2}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$;

D $\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$; E.

8. (3p) Valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care legea de compozitie $*$, definită astfel: $x*y=2axy+3x+3y-1, \forall x,y\in\mathbb{R}$, admite element neutru este:

A $-\dfrac{1}{3}$; B 3; C $\dfrac{1}{3}$; D $-\dfrac{2}{3}$; E -3.

9. (3p) Fie funcţia bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$.
Valoarea lui $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(3)$ este:

A 0; B 1; C 3; D -1; E -3.

10. (3p) Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{Z}_6$ ale ecuaţiei: $\widehat{2}x+\widehat{3}=\widehat{1}$ este:

A $\left\{\widehat{2},\widehat{3}\right\}$; B $\left\{\widehat{2},\widehat{4}\right\}$; C $\left\{\widehat{4},\widehat{5}\right\}$; D $\left\{\widehat{2},\widehat{5}\right\}$; E $\left\{\widehat{5}\right\}$.

11. (3p) Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & a+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care $A^{2024}=I_2$ este:

A $\{0,-2\}$; B $\varnothing$; C $\{4\}$; D $\{-2\}$; E $\{-4,-2\}$.

12. (3p) Valorile lui $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $1+i$ este rădăcină a polinomului X^3+2X^2+bX+a sunt:

A $a=0,b=-1$; B $a=-1,b=0$; C $a=8,;b=-6$;
D $a=1,b=1$; E $a=-8,b=1$.

13. (3p) Mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea
$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & -1 & 1\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ este inversabilă este:

A $\mathbb{R}-\{-1,1\}$; B $\varnothing$; C $\{0,1\}$; D $\{-1,1\}$;
E $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

14. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+3x+1\right)e^x dx$ este:

A $2e$; B $2e-1$; C $e+2$; D $-4e$; E $e+4$.

15. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+e^{2x}}{2x+e^{5x}}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

16. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2}$.
Valoarea lui $f(1)+f'(0)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{6+\pi}{12}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1+\pi}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1-\pi}{6}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{6-\pi}{12}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{\pi}{3}$.

17. **(3p)** Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+x+2}{x^{2n}+x^2+4}$.
Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $2+\ln\dfrac{5}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{13}{4}$;
$\boxed{\text{D}}$ $2+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $2+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{5}{4}$.

18. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int\limits_1^a (x-2)e^{-2x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ ∞; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{e^2}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $2e^{-2}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{1}{4e^2}$.

19. **(3p)** Ecuaţia tangentei în origine la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=e^x(2x+\sin x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=-x$; $\boxed{\text{B}}$ $y=3x$; $\boxed{\text{C}}$ $y=x+1$;
$\boxed{\text{D}}$ $y=x+e$; $\boxed{\text{E}}$ $y=-2x+e$.

20. **(3p)** Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$,
$f(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=x$; $\boxed{\text{B}}$ $y=x-1$; $\boxed{\text{C}}$ $y=x+1$;
$\boxed{\text{D}}$ $y=2x$; $\boxed{\text{E}}$ $y=1$.

21. **(3p)** Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = x + 1$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = x$; $\boxed{\text{E}}$ Nu admite asimptotă spre $+\infty$.

22. **(3p)** Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\int\limits_1^2 (3x + a^2)dx \leq 5$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; $\boxed{\text{B}}$ $\varnothing$; $\boxed{\text{C}}$ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;
$\boxed{\text{D}}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $\boxed{\text{E}}$ $[-1, 1]$.

23. **(3p)** Mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 2}dt$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\varnothing$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1, 1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1, 0, 1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0\}$.

24. **(3p)** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă, astfel încât $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1} \int\limits_1^{x^2} f(x)\, dx = 1$. Valoarea expresiei $(f(1))^2 + \dfrac{3}{2} f(1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 7; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{5}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

25. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2 + \sin^4 x}{x^4}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{5}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{4}$.

26. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)\, e^{x+1}$, atunci valoarea lui $l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} \int\limits_1^x f(t)dt$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $l = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $l = e^2$; $\boxed{\text{C}}$ $l = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $l = \infty$; $\boxed{\text{E}}$ $l = \frac{e^2}{2}$.

27. (3p) Suma pătratelor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (m+5)\,\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = (m-1)\,\vec{i} + \vec{j}$ sunt ortogonali este:

$\boxed{\text{A}}$ 20; $\boxed{\text{B}}$ 16; $\boxed{\text{C}}$ 24; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ 12.

28. (3p) Soluţia ecuaţiei $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

29. (3p) Relaţia dintre numerele reale a, b care face ca punctele $A(-1, 2)$, $B(a, b)$ şi $C(1, -3)$ să fie coliniare este:

$\boxed{\text{A}}$ $5a + 2b + 1 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $-5a + 2b - 1 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $a - 2b + 5 = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $a + b = 0$; $\boxed{\text{E}}$ $3a - 2b - 1 = 0$.

30. (3p) Raza cercului circumscris triunghiului ABC pentru care $AB = 5, AC = 4, A = \dfrac{\pi}{3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{7}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{7}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Varianta 32

1. (3p) Se consideră ecuaţia $x^2 - 4x + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Valoarea lui $A = x_1^3 + x_2^3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 64; $\boxed{\text{B}}$ 58; $\boxed{\text{C}}$ 8; $\boxed{\text{D}}$ 16; $\boxed{\text{E}}$ 40.

2. (3p) Valoarea modulului numărului complex $z = \dfrac{3 + 2\sqrt{5}i}{2 - 5i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ $3\sqrt{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $2\sqrt{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

3. (3p) Mulţimea numerelor naturale n pentru care dezvoltarea $\left(x^3 + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ conţine termeni independenţi de x este :

$\boxed{\text{A}}$ $\{3k, k \in N^*\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{5k, k \in N^*\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{15k, k \in N^*\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{16k, k \in N^*\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\emptyset$.

4. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe x^6 în dezvoltarea $\left(x^3 - \dfrac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^{2024}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-C_{2024}^{1685} 6^{1685}$; $\boxed{\text{B}}$ $C_{2024}^{1685} 6^{1685}$; $\boxed{\text{C}}$ $-C_{2024}^{1685} 6^{339}$;
$\boxed{\text{D}}$ $C_{2024}^{1686} 6^{1686}$; $\boxed{\text{E}}$ $C_{2024}^{339} 6^{339}$.

5. (3p) Lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, de vârfuri $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $3\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{3}$.

6. (3p) Mulţimea numerelor întregi t pentru care $\displaystyle\int_0^t (3x-2)dx \le 4$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1, 0, 1, 2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\varnothing$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0, 1\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{1, 2, 3\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0, 1, 2\}$.

7. (3p) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_0^{x^2}\sin 3t dt$ şi $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int\limits_0^{x} t^n dt, n\in\mathbb{N}^*$. Valoarea lui n pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 6.

8. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care $\int\limits_0^1 \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}\text{arctg } x dx=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-2\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\varnothing$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1,2\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1\}$.

9. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2n}{n\sqrt{3n^2+k^2}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2-\sqrt{3}+\ln 3$; $\boxed{\text{B}}$ $2-\sqrt{3}+\ln\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $1-\sqrt{3}+2\ln 3$;
$\boxed{\text{D}}$ $2+\ln\sqrt{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $2-\ln\sqrt{3}$.

10. (3p) Perechea de numere reale (a,b) pentru care $y=x$ este ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2+2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(-1,1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(1,-1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(1,1)$; $\boxed{\text{D}}$ $(0,1)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(1,0)$.

11. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\text{arctg } f(x)-\pi)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ -2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

12. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3\frac{2x^n}{x^n+1}dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ ∞.

13. (3p) Fie $I_n = \int_0^1 \left(1-x^3\right)^n dx, n \geq 0$. Termenii şirului precedent verifică relaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $I_n = 3I_{n-1}+1$; $\boxed{\text{B}}$ $nI_n = 3nI_{n-1}+1$; $\boxed{\text{C}}$ $3n(I_n+I_{n-1}) = I_{n-1}$;
$\boxed{\text{D}}$ $3n(I_n - I_{n-1}) = I_n$; $\boxed{\text{E}}$ $I_n = \frac{3n}{1+3n} I_{n-1}$.

14. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care $\int\limits_a^{a+1} (x^2+2x+1)dx = \frac{1}{3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-2,-1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{C}}$ $\{-1,2\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{-2,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,1\}$.

15. (3p) Valoarea integralei definite $I = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left|\frac{1}{2} - \sin x\right| dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} - 1$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} + 1$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 1$;
$\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3} + 1$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

16. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă pentru care $\int\limits_0^4 f(x)dx = 6$ şi $\int\limits_2^4 f(x)dx = -2$. Valoarea integralei $I = \int\limits_0^2 [2f(x) + f(2x)]\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 32; $\boxed{\text{B}}$ 12; $\boxed{\text{C}}$ 22; $\boxed{\text{D}}$ 19; $\boxed{\text{E}}$ 20.

17. (3p) Valoarea integralei definite $I = \int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+1} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\pi + \ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $2\pi + \ln\sqrt{2}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\pi - \ln 2$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{\pi}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$.

18. (3p) Valoarea integralei definite $I = \int\limits_{-2}^{2} \min\left\{1, x, x^2\right\} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{3}{2}$.

19. (3p) Dacă numerele reale a, b sunt astfel încât $A(1, -1)$ şi $B(2, 1)$ să fie situate pe dreapta $x + 3ay - b = 0$, atunci valoarea lui $b - a$ este:

A $\frac{2}{3}$; B $\frac{4}{3}$; C -1; D $-\frac{5}{3}$; E $\frac{5}{3}$.

20. (3p) Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + 12, (\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}$. Produsul elementelor simetrizabile faţă de această lege este:

A 10; B -8; C 9; D -9; E 8.

21. (3p) Valoarea lui $\sin(2 \arcsin \frac{4}{5})$ este:

A $\frac{2}{5}$; B $\frac{1}{4}$; C $\frac{1}{25}$; D $\frac{24}{25}$; E $\frac{16}{25}$.

22. (3p) Valoarea lui $d = \det A$, unde $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ iar x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei: $x^3 + 5x - 2 = 0$ este:

A 10; B -10; C 0; D -5; E 25.

23. (3p) Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{7} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2024}$ este:

A 337; B 336; C 338; D 335; E 674.

24. (3p) Valoarea lui $S = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + 2024i^{2024}$ este:

A $-2024 + 2024i$; B $-1012 + 1012i$; C $2024i$;
D $-2024i$; E $1012 - 1012i$.

25. (3p) Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$ este:

A 5; B -5; C 1; D $\log_5 6$; E 0.

26. (3p) Suma dintre soluţia reală a ecuaţiei $\log_2 (2 \log_4 (\log_6 x)) = 0$ şi triplul inversei sale este:

A 4; B $\frac{559873}{432}$; C 12; D $\frac{433}{12}$; E $\frac{13}{2}$.

27. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei
$\log_2 (16^x + 11) = 2 + \log_2 (4^x + 2)$ este:

A $\{0, \log_3 4\}$; B $\{\log_3 2, \log_4 3\}$; C $\{0, \log_2 \sqrt{3}\}$;

D $\{0, -\log_4 3\}$; E $\{0\}$.

28. (3p) Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea
$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este inversabilă este:

A $\{0, 1\}$; B $\emptyset$; C $\mathbb{R}$; D $\{2, 3\}$; E $\{-2, -1\}$.

29. (3p) Valorile numerelor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + y - az = b \\ 2x + y - 3z = 2 + b \end{cases}$$

are cel puţin două soluţii reale sunt:

A $a = 0, b = 1$; B $a = 1, b = 0$; C nu există astfel de valori;
D $a = 4, b = \frac{1}{2}$; E $a = -4, ; b = -\frac{1}{2}$.

30. (3p) Să se afle $x + y$, unde x, y sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{3}y = \widehat{4} \\ \widehat{2}x + \widehat{5}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

A $\widehat{1}$; B $\widehat{2}$; C $\widehat{6}$; D $\widehat{0}$; E $\widehat{3}$.

Varianta 33

1. (3p) Valoarea lui $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \arcsin\dfrac{4}{5}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2\sqrt{3}-5}{10}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1-2\sqrt{3}}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3-2\sqrt{3}}{10}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{2-5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$.

2. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care distanţa dintre dreptele $3x - 4y + 2023 = 0$ si $3x - 4y + a = 0$ este 1 este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{2018, 2028\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{2022, 2024\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{2019, 2029\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{2028\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{2024\}$.

3. (3p) Valorile parametrilor reali m, n, pentru care polinomul $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + mX + n$ admite rădăcina complexă $2 - i$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $m = 14, n = 6$; $\boxed{\text{B}}$ $m = -14, n = 30$; $\boxed{\text{C}}$ $m = 14, n = -6$;
$\boxed{\text{D}}$ $m = 6, n = -30$; $\boxed{\text{E}}$ $m = 6, n = 30$.

4. (3p) Se consideră ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Valoarea lui $A = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 7; $\boxed{\text{B}}$ 43; $\boxed{\text{C}}$ -5; $\boxed{\text{D}}$ 55; $\boxed{\text{E}}$ 27.

5. (3p) Partea reală a numărului complex $z = \dfrac{-3 + \sqrt{5}i}{2 - \sqrt{5}i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{9}{\sqrt{5}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{11}{\sqrt{5}}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{-11}{9}$.

6. (3p) Dacă p este numărul soluţiilor în inelul $(\mathbb{Z}_{10}+, \cdot)$ ale ecuaţiei $\widehat{2}x + \widehat{3} = \widehat{6}$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $p = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $p = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $p = 4$; $\boxed{\text{D}}$ $p = 6$; $\boxed{\text{E}}$ $p = 1$.

7. (3p) Fie $A(4, -1)$, $B(2, -3)$ şi $C(1, -4)$. Ecuaţia medianei ce pleacă din vârful C este:

$\boxed{\text{A}}$ $x - y - 5 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $3x + y - 7 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $x + 3y + 7 = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $x - 2y - 5 = 0$; $\boxed{\text{E}}$ $-3x + y - 7 = 0$.

8. (3p) Partea reală a numărului $z \in \mathbb{C}$, care verifică relaţia $|z| + 5z = 2 + 10i$ este:

A 1; B 2; C $\frac{5}{6}$; D -1; E 0.

9. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x^2-2x}{x^2+1} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x^2+5x}{x^2+2} \text{ este:}$$

A $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$; B $(-\infty, 0)$; C $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$;
D $(0, +\infty)$; E $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

10. (3p) Dacă $S = \dfrac{3}{1\cdot 3} + \dfrac{3}{2\cdot 4} + \dfrac{3}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{3}{2022\cdot 2024}$, atunci partea întreagă a lui S este:

A 0; B 1; C 2; D 3; E 4.

11. (3p) Lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, cu $BC = 1+\sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{3}$, este:

A $3\sqrt{2}$; B 2; C $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; D $\sqrt{2}$; E $2\sqrt{2}$.

12. (3p) Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care ecuaţia $x^2+2mx+5=0$ are amble soluţii în intervalul $(2, +\infty)$ este:

A $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$; B $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$; C $\emptyset$;
D $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right)$; E $\left(-\frac{9}{4}, -\sqrt{5}\right]$.

13. (3p) Termenul care conţine pe x şi y la puteri egale în dezvoltarea $\left(xy^3 - \dfrac{6}{y\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ este:

A T_{19}; B T_{15}; C T_{14};
D T_{16}; E T_9.

14. (3p) Dacă $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3+5x+6=0$, atunci:

A $d^2 = -184$; B $d^2 = 30$; C $d^2 = -25$;
D $d^2 = -1472$; E $d^2 = 150$.

15. (3p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Atunci A^{-1} verifică relaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $A^{-1} = \frac{1}{10}(A + 3I_2)$; $\boxed{\text{B}}$ $10A^{-1} - A + 3I_2 = O_2$;
$\boxed{\text{C}}$ $A^{-1} = \frac{1}{10}(2A + I_2)$; $\boxed{\text{D}}$ $A^{-1} = -\frac{1}{10}(A + 3I_2)$;
$\boxed{\text{E}}$ $10A^{-1} - 2A + 3I_2 = O_2$.

16. (3p) Fie legea de compoziţie asociativă $*$, definită pe $\mathbb{Z}$ astfel:

$$x * y = 3xy + 3x + 3y + 2,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Numărul tripletelor ordonate de numere întregi (x, y, z) care au proprietatea $x * y * z = 8$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

17. (3p) Numărul permutărilor mulţmii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ care au pe prima poziţie un număr par este:

$\boxed{\text{A}}$ 30; $\boxed{\text{B}}$ 60; $\boxed{\text{C}}$ 72; $\boxed{\text{D}}$ 48; $\boxed{\text{E}}$ 24.

18. (3p) Valoarea integralei definite $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{12}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{7\pi^2}{144}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{7\pi^2}{288}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{5\pi^2}{144}$.

19. (3p) Perechea de numere reale (a, b) pentru care $y = x + 1$ este ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + 2}$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $(1, 3)$; $\boxed{\text{B}}$ $(-1, 1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-1, 3)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(1, -3)$; $\boxed{\text{E}}$ $(1, 0)$.

20. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$. Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x) \cos x dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 2.

21. (3p) Valoarea integralei definite $I = \int\limits_{-3}^{3} |x+2|\, e^{3x} dx$ este:

A $\dfrac{-14e^9 + 2e^{-6} - 2e^{-9}}{9}$; B $\dfrac{14e^9 + e^{-6} - e^{-9}}{9}$;
C $\dfrac{14e^9 + 2e^{-6} - 2e^{-9}}{9}$; D $\dfrac{14e^9 + 2e^{-6} - 4e^{-9}}{9}$; E 0.

22. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \operatorname{arctg} x)}{2x^2}$ este:

A 1; B -1; C 0; D $+\infty$; E $\frac{1}{2}$.

23. (3p) Primitiva F a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, cu proprietatea: $F(0) = 1$, este:

A $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x - 2\operatorname{arctg} x + 1$;
B $F(x) = x \ln(1 + x^2) + 2x - 2\operatorname{arctg} x + 1$;
C $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x - 1$;
D $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + 1$;
E $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x - 2\operatorname{arctg} x$.

24. (3p) Fie funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^3 + 2}{1 + 2x^4}$.

Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_{x}^{x+3} f(t)dt$ este:

A 1; B 2; C 0; D $+\infty$; E $\frac{1}{2}$.

25. (3p) Valorile reale ale lui a, b, pentru care $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 4} + ax + 3, x < 0 \\ \ln(x^2 + 1) + b, x \geq 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$, sunt:

A $a = 0, b = 5$; B $a = 1, b = 5$
C $a = \frac{1}{2}, b = e + 5$; D $a = 1, b = 4$; E $a = -\frac{1}{4}, b = 5$.

26. (3p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + a}{e^{2x}}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Dacă $f''(0) = 8$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 1$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 3$; $\boxed{\text{C}}$ $a = -1$; $\boxed{\text{D}}$ $a = -3$; $\boxed{\text{E}}$ $a = 10$.

27. (3p) Mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}} e^{ax^2}dx = 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{0,1,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-1,0,1\}$.

28. (3p) Fie funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\ln\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f(k)}{k+2}\right)^{\frac{1}{n}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{e}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ ∞.

29. (3p) Termenii şirului $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(x+2)^2}dx$, $n\geq 1$, verifică relaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $I_{n+2}+4I_{n+1}+4I_n = \frac{1}{n+1}$;
$\boxed{\text{B}}$ $I_{n+2}+4I_{n+1}+4I_n = \frac{1}{n-1}$;
$\boxed{\text{C}}$ $I_{n+2}-4I_{n+1}+I_n = \frac{4}{n+1}$;
$\boxed{\text{D}}$ $I_{n+1}+4I_n = \frac{1}{n+1}$;
$\boxed{\text{E}}$ $I_{n+2}+4I_{n+1}+I_n = \frac{1}{n+1}$.

30. (3p) Intervalele de monotonie ale funcţiei $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ f este strict crescătoare pe$(0,\sqrt{e}]$ şi strict descrescătoare pe $[\sqrt{e},+\infty)$;
$\boxed{\text{B}}$ f este strict crescătoare pe$(0,e]$ şi strict descrescătoare pe $[e,+\infty)$;

$\boxed{\text{C}}$ f este strict crescătoare pe$(0,e^2]$ şi strict descrescătoare pe $[e^2,+\infty)$;

$\boxed{\text{D}}$ f este strict crescătoare pe $[\sqrt{e},+\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(0,\sqrt{e}]$;
$\boxed{\text{E}}$ f este strict crescătoare pe$[e,+\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(0,e]$.

Varianta 34

1. (3p) Partea întreagă a expresiei $E = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ -2 .

2. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $\sqrt{3x-5} \geq 1-x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\emptyset$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left(1, \frac{5}{3}\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $[2,3]$.

3. (3p) Valoarea integralei definite $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$;
$\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. (3p) Asimptota spre $+\infty$ a functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln(x^2+1)$, are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $y = x$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x+1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 0$;
$\boxed{\text{E}}$ f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5. (3p) Numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b}+x\right) = 1$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $a = 0, b = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $a = -2, ; b = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $a = 1, b = 0$;
$\boxed{\text{D}}$ $a = -2, b \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ $a = -1, b = 1$.

6. (3p) Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^3-9} = \sqrt[3]{x^2+9}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 6.

7. (3p) Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta $y = 2x+1$ este tangentă parabolei $y = x^2 + ax + 2$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{4\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,4\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{-4,0\}$.

8. (3p) Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia
$e^x(x^2-6x+1) = a$ are trei soluţii reale este:

$\boxed{\text{A}}$ $\left(-4e^5, \frac{8}{e}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $\left[-4e^5, \frac{8}{e}\right]$; $\boxed{\text{C}}$ $[-1,5]$;

D $\left(0, \frac{8}{e}\right)$; E $\emptyset$.

9. (3p) Cel mai mic număr întreg a pentru care $\frac{x^2+3}{x^2+ax+5} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este:

A -4; B -5; C 0; D 2; E 1.

10. (3p) Ştiind că polinomul $P = X^3 - 3X + a$, $a \in \mathbb{R}$, este divizibil cu $X + 2$, atunci suma inverselor rădăcinilor sale este:

A $-\frac{3}{2}$; B $\frac{3}{2}$; C $\frac{2}{3}$; D $-\frac{2}{3}$; E 0.

11. (3p) Mulţimea soluţiilor din$[0, 2\pi]$ ale ecuaţiei

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \text{ este:}$$

A $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$; B $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}$; C $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$;
D $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$; E $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

12. (3p) Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $a = 10$ şi raza cercului înscris în triunghi $r = 1$. Dacă $S = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, unde b, c sunt lungimile catetelor, atunci valoarea lui S este:

A $\frac{6}{11}$; B $\frac{11}{6}$; C 1; D $\frac{6}{5}$; E 2.

13. (3p) Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Dacă $\frac{b}{a} = 1$, $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$, atunci:

A $m(\widehat{A}) = 90°$; B $m(\widehat{A}) = 45°$; C $m(\widehat{A}) = 30°$;
D $m(\widehat{A}) = 60°$; E $m(\widehat{A}) = 120°$.

14. (3p) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x \ln x$, atunci imaginea funcţiei f este:

A $(0, \infty)$; B $(-\infty, 0)$; C $(-\infty, e^2]$;
D $(-\infty, 2e]$; E $\mathbb{R}$.

15. (3p) Fie $A(2, 5), B(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă mijlocul segmentului AB se află pe dreapta $x + 3y - 1 = 0$, iar dreapta AB este perpendiculară pe dreapta $-x + 2y - 1 = 0$ atunci $a + b$ este:

A 3; B $-\frac{3}{5}$; C $\frac{3}{5}$; D $\frac{11}{3}$; E 0.

16. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei:

$$\left[\frac{x+1}{x^2+3x+4}\right]+\left[\frac{x^2+3x+4}{x+1}\right]=3 \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $(0,1)$; $\boxed{\text{C}}$ $[0,1]$; $\boxed{\text{D}}$ $(-1,1)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$.

17. (3p) Mulţimea numerelor naturale n pentru care avem relaţia: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^n=\sqrt{3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{12k\pm 1, k\in\mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{2k+1, k\in\mathbb{Z}\}$;
$\boxed{\text{C}}$ $\{4k+1, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{3k+1, k\in\mathbb{Z}\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{4k+3, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{3k+1, k\in\mathbb{Z}\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\emptyset$.

18. (3p) Fie $a\in\mathbb{R}$ partea reală a numărului complex z. Dacă z verifică relaţia: $|z-1+i|-z=2+4i$, atunci mulţimea valorilor lui a este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-3\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-3,1,2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\varnothing$.

19. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n-2}\right\}$,unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x, este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ nu există; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

20. (3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Matricea $B=\sum\limits_{k=0}^{n}A^{2k+1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $B=\begin{pmatrix}n & 0 & -n\\ 0 & 0 & 0\\ -n & 0 & n\end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $B=\begin{pmatrix}2^{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 & -2^{\frac{n(n+1)}{2}}\\ 0 & n & 0\\ -2^{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 & 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{C}}$ $B=\begin{pmatrix}\frac{2^{2n}-1}{3} & 0 & -\frac{2^{2n}-1}{3}\\ 0 & -n & 0\\ -\frac{2^{2n}-1}{3} & 0 & \frac{2^{2n}-1}{3}\end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{D}}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} & 0 & -\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \\ 0 & -n-1 & 0 \\ -\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} & 0 & \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{E}}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} & 0 & -\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \\ 0 & n+1 & 0 \\ -\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} & 0 & \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \end{pmatrix}$.

21. (3p) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $*$ astfel:

$$x * y = xy - ax - ay + a(a+1),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc relaţia:

$$\underbrace{5 * 5 * \ldots * 5}_{\text{2024 ori}} = 9^{1012} + a \text{ este:}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\{5, 8\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1, 3\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{2, 8\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, 5\}$.

22. (3p) Dacă $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 2024 \cdot 2024!$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $S = 2025! - 1$; $\boxed{\text{B}}$ $S = 2025! + 1$; $\boxed{\text{C}}$ $S = 2 \cdot 2025! - 1$;
$\boxed{\text{D}}$ $S = 2025!$; $\boxed{\text{E}}$ $S = 2026!$.

23. (3p) Dacă restul împărţirii polinomului $P = 3\left(2X^4 + 1\right)^{2024} + X + a$ la $X + 1$ este $3^{2025} + 1$, atunci suma coeficienţilor polinomului $P(X)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $3^{2024} + 1$; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ $3(9^{1012} + 1)$; $\boxed{\text{D}}$ 3^{2025}; $\boxed{\text{E}}$ $3^{2025} + 1$.

24. (3p) Valoarea lui $l = \lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1 + 3x}\, x \ln(1 + x) dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $l = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $l = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $l = \frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $l = \frac{1}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $l = \ln 2$.

25. (3p) Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(t^2 - 1\right) e^t dt$. Atunci imaginea funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $(0, \infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $[-1, \infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{D}}$ $[0, \infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(-e, \infty)$.

26. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^3 + 2x + 4)}{\ln(2x^4 + x^2 + 1)}$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{3}{4}$; $\boxed{B}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{C}$ $\frac{3}{8}$; $\boxed{D}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{E}$ $\frac{1}{2}$.

27. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2x^4 + 3x^2 + 1}$. Atunci valoarea lui

$$l = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt \text{ este:}$$

$\boxed{A}$ $l = \ln\sqrt{3}$; $\boxed{B}$ $l = 0$; $\boxed{C}$ $l = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\boxed{D}$ $l = \infty$; $\boxed{E}$ $l = \ln\frac{4}{3}$.

28. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{arctg}\dfrac{x+1}{x^2+1}$, atunci, ecuaţia tangentei la graficul lui f , în punctul de abscisă 1, este:

$\boxed{A}$ $4y+x-\pi-1 = 0$; $\boxed{B}$ $4y+x+\pi-1 = 0$; $\boxed{C}$ $y+x-2\pi-1 = 0$;
$\boxed{D}$ $4y + x + 2\pi - 1 = 0$; $\boxed{E}$ $y + x - \frac{\pi}{2} = 0$.

29. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2+7}{x+3}$. Punctele în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu dreapta $x - y + 2 = 0$ sunt:

$\boxed{A}$ $A(1, \frac{9}{4}), B(-1, \frac{9}{2})$; $\boxed{B}$ $A(1, \frac{9}{4}), B(-1, \frac{9}{2}), C(0, \frac{7}{3})$;
$\boxed{C}$ $A(2, 3), B(-8, -27)$; $\boxed{D}$ nu există astfel de puncte;
$\boxed{E}$ $A(-8, -27)$.

30. **(3p)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-2x}$ o funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, a cărei derivată de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^*$, are expresia:

$$f^{(n)}(x) = e^{-2x}\left(a_n x + b_n\right) .$$

Atunci:

$\boxed{A}$ $a_{60} = 4^{60}$; $\boxed{B}$ $a_{2024} = -4^{1012}$; $\boxed{C}$ $a_{2n+1} = -2^{2n}$;
$\boxed{D}$ $a_{2023} = 4^{1012}$; $\boxed{E}$ $a_{2n} = 4^n$.

Varianta 35

1. (3p) Mulţimea valorilor parametrului real m, pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^4-(3m+4)\,x^2+m^2=0$ sunt numere reale în progresie aritmetică este:

A $\frac{-12}{19}$; B $\left\{-\frac{12}{19},12\right\}$; C $\{1,12\}$; D $\{12\}$; E $\left\{-\frac{12}{19},1\right\}$.

2. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

este:

A $\{3\}$; B $\{e,3\}$; C $\{e^2\}$; D $\varnothing$; E $\left(\frac{3}{2},6\right)$.

3. (3p) Fie $E(z)=z^2+az+b+2i,\ z,a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $E(1)=4+3i$, $E(i)=1+4i$. Partea reală a numărului $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ este:

A $-\frac{1}{2}$; B 2; C $2+\frac{2\sqrt{5}}{5}$; D $\frac{12}{5}$; E $\frac{8}{3}$.

4. (3p) Mulţimea valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$$

este:

A $(1,+\infty)$; B $[1,2]$; C $[2,+\infty)$; D $[1,+\infty)$; E $\emptyset$.

5. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(3k)^3+n^3}\right)$ este:

A $\frac{1}{27}(\ln 2-\ln 7)$; B $\frac{1}{27}(\ln 2+\ln 7)$; C $\frac{1}{3}(\ln 2+\ln 7)$;
D $\frac{1}{81}(2\ln 2+\ln 7)$; E $\frac{1}{81}(2\ln 2-\ln 7)$.

6. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $[x+3]=2\{2x\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, iar $\{a\}$ partea sa fracţionară, este:

A $\left\{-3,-\frac{5}{2}\right\}$; B $\{-3,-2\}$; C $\left\{-3,-\frac{5}{2},-\frac{7}{4},-\frac{5}{4}\right\}$;
D $\left\{-3,-1,-\frac{1}{2}\right\}$; E $\emptyset$.

7. (3p) Mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{5}{8}$, unde x_1,x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2+(2a+1)\,x+2=0$ este:

A $\left\{0,-\frac{3+\sqrt{21}}{4},-\frac{3-\sqrt{21}}{4}\right\}$; B $\{0\}$;
C $\left\{0,1-\frac{\sqrt{7}}{2},1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$; D $\left\{0,\frac{3+\sqrt{21}}{4},\frac{3-\sqrt{21}}{4}\right\}$; E $\emptyset$.

8. (3p) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci avem:

A $A^2-5A=-3I_2$; B $A^2+5A=9I_2$; C $A^2-A=I_2$;
D $A^2-5A=-9I_2$; E $A^2+5A=3I_2$.

9. (3p) Mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta $y=-x+3$ nu intersectează parabola $y=x^2-(3a+1)\,x+2$ este:

A $\left\{0,-\frac{3+\sqrt{21}}{4},-\frac{3-\sqrt{21}}{4}\right\}$; B $\{0\}$;
C $\left\{0,1-\frac{\sqrt{7}}{2},1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$; D $\left\{0,\frac{3+\sqrt{21}}{4},\frac{3-\sqrt{21}}{4}\right\}$; E $\emptyset$.

10. (3p) Numărul perechilor de numere reale, soluţii ale sistemului

$$\begin{cases}3^x-y=10\\ 3^{-x}-\frac{1}{y}=\frac{10}{9}\end{cases}\quad \text{este:}$$

A 1; B 3; C 0; D 2; E 4 .

11. (3p) Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\frac{x^2-3}{x^2-6x+5}\geq 0$ este:

A $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup(5,+\infty)$; B $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)\cup(5,+\infty)$;

C $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$; D $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$; E $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (1, \sqrt{3}] \cup (5, +\infty)$.

12. (3p) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & a \\ 1 & -1 & 3 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricele A şi B au acelaşi rang este:

A $\{1\}$; B $\{-1, 1\}$; C $\{-1, 0, 1\}$; D $\emptyset$; E $\{0\}$.

13. (3p) Pe $(3, +\infty)$ se consideră legea asociativă

$$x * y = 3 + (x-3)^{\ln(y-3)} .$$

Suma soluţiilor ecuaţiei $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{2023 ori}} = x$ este:

A 4; B $10 + \frac{1}{e} + e$; C $4 + e$; D $3 + \frac{1}{e}$; E 7.

14. (3p) Fie un polinom cu coeficienţi reali $P(X)$ astfel încât suma coeficienţilor săi să fie 10, iar termenul liber 2. Restul împărţirii lui la $X(X-1)$ este polinomul $R(X)$ a cărui expresie este:

A $R(X) = 2X + 8$; B $R(X) = 2X + 10$; C $R(X) = 10X + 2$;
D $R(X) = 10X$; E $R(X) = 8X + 2$.

15. (3p) Dacă $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, atunci valoarea lui $\sin x(1 + \text{ctg } x) + \cos x(1 + \text{tg } x)$ este:

A $-\left(\sqrt{3}+1\right)$; B $\left(\sqrt{3}+1\right)$; C $\sqrt{3}$; D $-\sqrt{3}$; E $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

16. (3p) Dacă $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, sunt astfel încât unghiul dintre ei, α, are $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, atunci m se află în mulţimea:

A $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$; B $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; C $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$; D $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$; E $\{0\}$.

17. (3p) Dacă $\text{tg } x = 5$, atunci raportul $\frac{3\sin x + 4\cos x}{6\cos x - \sin x}$ este:

A 1; B $\frac{23}{29}$; C 19; D $\frac{29}{23}$; E $\frac{1}{19}$.

18. (3p) Fie $A(-1,3), B(2,-1), C(0,-3)$. Ecuaţia paralelei prin C la mediana ce pleacă din vârful A este:

A $y+5x+3=0$; B $y+5x-3=0$; C $2y-5x-6=0$; D $y=5x$; E $2y+5x+6=0$.

19. (3p) Asimptota spre $-\infty$ a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{|x^2-4|}$ are ecuaţia:

A $y=x$; B $y=0$; C $y=\frac{1}{2}x+1$; D $y=\frac{1}{2}x-1$; E f nu admite asimptotă spre $-\infty$.

20. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+2x^3+x^2}}{(x+1)(x^2-x+3)} & \text{dacă} \quad x\neq -1\\ a & \text{dacă} \quad x=-1\end{cases}.$$

Valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ care face ca funcţia să fie continuă pe $\mathbb{R}$ este:

A $a=0$; B $a=-2$; C $a=1$; D $a=-2$; E nu există o astfel de valoare.

21. (3p) Expresia primitivei funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$, ce trece prin $A(1,\frac{1}{3})$ este:

A $F(x)=-\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{x^3}{3}+\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$;

B $F(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{x^3}{3}+\frac{2-2\sqrt{2}}{3}$;

C $F(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{3}+\frac{2-\sqrt{2}}{3}$;

D $F(x)=\frac{1}{3}x\sqrt{x^2+1}-\frac{x^3}{3}+\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$;

E $F(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{x^3}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

22. (3p) Dacă $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$, atunci valoarea lui I este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ -5; $\boxed{\text{E}}$ 1.

23. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$, atunci imaginea funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ $(0,\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $(5,+\infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{D}}$ $[5,+\infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(1,+\infty)$.

24. (3p) Valoarea integralei definite $I = \int_0^2 |x-1|\, e^x dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2(e-1)$; $\boxed{\text{B}}$ $2e$; $\boxed{\text{C}}$ $2(e+1)$; $\boxed{\text{D}}$ $2e+1$; $\boxed{\text{E}}$ e.

25. (3p) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln^2 x$. Alegeţi afirmaţia corectă din cele de mai jos.

$\boxed{\text{A}}$ Imaginea funcţiei f este $(0,\infty)$;
$\boxed{\text{B}}$ Punctul de inflexiune al lui f este e;
$\boxed{\text{C}}$ f este strict crescătoare pe $(0,e]$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = x$ reprezintă asimptota spre $+\infty$;
$\boxed{\text{E}}$ f are două puncte de extrem local.

26. (3p) Valoarea lui $l = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\operatorname{tg}^2 x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

27. (3p) Numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3;
$\boxed{\text{D}}$ nu are puncte de inflexiune; $\boxed{\text{E}}$ 4.

28. (3p) Fie $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + a}{x^2 - 1}$. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$, pentru care 2 este punct de extrem local este:

A 1; B -2; C $\dfrac{3}{2}$; D 0; E $-\dfrac{1}{2}$.

29. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$, pentru care f are trei puncte de extrem local este:

A $(0, +\infty)$; B $\{0, 1, 2\}$; C $\{0\}$; D $\emptyset$; E $(2, +\infty)$.

30. (3p) Valoarea lui $l = \lim_{n \to \infty} (3n + 1) \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2 + x + 1} dx$ este:

A 0; B 1; C 3; D $+\infty$; E nu există limita.

Varianta 36

1. (3p) Se consideră progresia aritmetică 3, 9, 15, ...,117. Suma ultimilor 10 de termeni ai acestei progresii este:

A 2400; B 900; C 1550; D 2100; E 800.

2. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 1 + a$. Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f are două puncte comune cu axa Ox este:

A $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; B $\{0, 1\}$; C $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; D $(0, +\infty)$; E $(-\infty, 0)$.

3. (3p) Valoarea modulului numărului complex $z = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}\mathrm{i}}$ este:

A $2i$; B $\dfrac{3}{5}$; C 2; D 3; E 1.

4. (3p) Şirul $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ are limita:

A este divergent; B $\dfrac{1}{2}$; C $\frac{1}{\sqrt{2}}$; D -1; E 0.

5. (3p) Fie dezvoltarea $(1 - x^2)^7$. Atunci coeficientul termenului care îl conţine pe x^3 este:

A 4; B -4; C 0; D -2; E 8.

6. (3p) În planul Oxy se consideră triunghiul AOB, de vârfuri $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $O(0, 0)$. Lungimea înălţimii duse din A este:

A $-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$; B $2\sqrt{2}$; C $\sqrt{2}$; D $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ E $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

7. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2} = 0$, sunt:

A $\{1, 0\}$; B 1; C 0; D -1; E $\{1, -1\}$.

8. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sin x + \cos x = 1$, pentru $x \in [-\pi, \pi]$, sunt:

A $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$; B 0; C $\left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$; D $\dfrac{\pi}{4}$; E $\dfrac{\pi}{2}$.

9. (3p) În planul Oxy se consideră punctele A, B, C, D, de coordonate $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(7,2)$, $D(3,2)$. Valoarea ariei patrulaterului $ABCD$ este:

A 4; B 6; C 8; D 12; E 10.

10. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Valoarea lui $(f \circ f \circ f \circ f)(0)$ este:

A 5; B 15; C 2; D 15; E 17.

11. (3p) Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $9^x - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$ este:

A $\{0,3\}$; B $\{1,0\}$; C $\{1\}$; D $\{0\}$; E $\{1,1\}$.

12. (3p) Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$. Punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f sunt:

A $\left\{\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right\}$; B $x = 0$; C $x = -\dfrac{\pi}{2}$; D $x = \dfrac{\pi}{4}$;
E $x = \dfrac{\pi}{2}$.

14. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \left(x - \frac{3}{2}x^2 + 4x^3\right) \mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{1}{2}$; B -1; C 0; D 2; E 1.

15. (3p) Se consideră funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei f este:

A 1; B 0; C 2; D 3; E 4.

16. (3p) Valoarea limitei

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3}}{x-\frac{3}{2}}$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $2\mathrm{e}^3$; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ e.

17. (3p) Valoarea integralei $\int_{-4}^{4}\sin x\cos^5 x\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{5}{6}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{6}$.

18. (3p) Câtul împărţirii polinomului X^7-1 la $X-1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$; $\boxed{\text{B}}$ X^3+X^2+X;
$\boxed{\text{C}}$ $X^6+X^5+X^4$; $\boxed{\text{D}}$ $X^6-X^5+X^4-X^3$;
$\boxed{\text{E}}$ X^2-X+1.

19. (3p) În planul xOy se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ corespunzătoare rădăcinilor complexe ale ecuaţiei $z^6-1=0$. Valoarea perimetrului hexagonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $3\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $6\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 12; $\boxed{\text{E}}$ $3\sqrt{2}$.

20. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Funcţia este derivabilă pentru:

$\boxed{\text{A}}$ $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $(2,+\infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty,-1)$; $\boxed{\text{D}}$ $(1,+\infty)$;
$\boxed{\text{E}}$ nu este derivabilă în -1

21. (3p) Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Atunci A^{2024} este:

$\boxed{\text{A}}$ $A-I$; $\boxed{\text{B}}$ $A+I$; $\boxed{\text{C}}$ I; $\boxed{\text{D}}$ $-A$; $\boxed{\text{E}}$ O.

22. (3p) Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+X+1\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Valoarea expresiei $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ -3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 1.

23. (3p) Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie:

$$x \circ y = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Ecuaţia $x \circ x = 4$ are soluţia reală:

$\boxed{\text{A}}$ $-\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 4$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{E}}$ $1 + \ln 2$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul $x = 0$ are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $y = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $y = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 2$; $\boxed{\text{E}}$ $y = -1$.

25. (3p) Soluţiile ecuaţiei $|x+1| + |x-2| - |x-4| = 0$, pentru $x \in [2, 4]$, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ nu are soluţii; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ 3.

26. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$, partea fracţionară a lui $x \in \mathbb{R}$. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

27. (3p) Se consideră şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Câţi termeni ai şirului sunt în intervalul $\left(\frac{12}{11}, \frac{11}{10}\right)$:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

28. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Asimptotele orizontale ale graficului funcţiei sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $y = -1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 1, y = -1$; $\boxed{\text{D}}$ nu are $\boxed{\text{E}}$ $y = \frac{\pi}{4}$.

29. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\arcsin x + \arccos x)\,\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi^2}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\pi^2}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ π^2.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^{2023}\right)}{\ln\left(1+x^{2023}\right)}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Varianta 37

1. (3p) Soluţiile numere complexe ale ecuaţiei $z^3 = \overline{z}$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0, 1, -1, i, -i\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1, -1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{i, -i\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{0, 1, -1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0, i, -i\}$.

2. (3p) Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + my = 0 \\ x - m^3 y = 0 \end{cases}$ are soluţie unică sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $m \neq 0$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(0, +\infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(-\infty, 0)$.

3. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe X^6 în polinomul $(X^5 - 7)^5$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 1.

4. (3p) Punctele de intersecţie ale parabolei $y = x^2 + 6$ cu dreapta $y = 5x$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{(2, 10), (3, 15)\}$; $\boxed{\text{B}}$ $(1, 2)$; $\boxed{\text{C}}$ nu se interseactează
$\boxed{\text{D}}$ $(-1, 0)$; $\boxed{\text{E}}$ $(0, 0)$.

5. (3p) Valoarea numărului complex $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $2i$; $\boxed{\text{B}}$ -4; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ -2; $\boxed{\text{E}}$ 1.

6. (3p) În planul Oxy se consideră punctele de coordonate $A(4, 0)$, $B(4, 4)$. Distanţa de la punctul A la dreapta (OB) este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

7. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{x + 2}$, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $\{0, 1\}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, -1\}$.

8. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1}$ este:

A 2; B ; e C e^2; D $\sqrt{e}$; E 1.

9. (3p) În planul Oxy se consideră punctele A, B, C, D, de coordonate $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(7,2)$, $D(3,2)$. Valoarea perimetrului patrulaterului $ABCD$ este:

A $8+4\sqrt{2}$; B $8\sqrt{2}$; C $6+2\sqrt{2}$; D $4+3\sqrt{2}$; E 4.

10. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x$.
Valoarea lui $(f\circ f\circ f\circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ este:

A $\frac{1}{2}$; B π; C $\dfrac{\pi}{2}$; D $-\frac{\pi}{2}$; E $-\pi$.

11. (3p) Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{Z}_4$ ale ecuaţiei $\widehat{x}^2+\widehat{x}=\widehat{0}$ este:

A $\left\{\widehat{2},\widehat{3}\right\}$; B $\left\{\widehat{1},\widehat{0}\right\}$; C $\left\{\widehat{1}\right\}$;
D $\left\{\widehat{0},\widehat{3}\right\}$; E $\left\{\widehat{1},\widehat{1}\right\}$.

12. (3p) Inversa matricei $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

A $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{pentru} \quad x\neq 0\\ 0 & ,\ \text{pentru} \quad x=0\end{cases}.$$

Derivata funcţiei în punctul $x=0$ este:

A $x=1$; B $x=0$; C $x=\frac{\pi}{2}$;
D $x=\frac{\pi}{4}$; E $x=-1$.

14. (3p) Partea întreagă a integralei $\displaystyle\int_4^5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ este:

A 1; B 0; C -1; D 1; E 2.

15. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x-x$. Punctele de extrem ale funcţiei f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ e; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{e}-1$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

16. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{3}$.

17. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-20\pi}^{20\pi}\cos x\sin 5x\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{5}{6}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{1}{6}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

18. (3p) Câtul împărţirii polinomului X^7+1 la $X+1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $X^6-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1$; $\boxed{\text{B}}$ $X^4-X^3+X^2$;
$\boxed{\text{C}}$ $X^6-X^5+X^4$; $\boxed{\text{D}}$ $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$;
$\boxed{\text{E}}$ $-X^3+X^2-X$.

19. (3p) Soluţiile ecuaţiei $25^x-5\cdot 5^x+6=0$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\log_2 5$; $\boxed{\text{C}}$ $\log_5 3$; $\boxed{\text{D}}$ $\{\log_5 2,\log_5 3\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0,\log_2 3\}$.

20. (3p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^x$.
Derivata funcţiei $f'(x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $x^x(\ln x+1)$; $\boxed{\text{B}}$ $x^x+\ln x$; $\boxed{\text{C}}$ $x^x\ln x$;
$\boxed{\text{D}}$ $x^x-\ln x$; $\boxed{\text{E}}$ $x^x\ln x+\ln x$

21. (3p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Matricea A^3+A este:

$\boxed{\text{A}}$ $-A$; $\boxed{\text{B}}$ A; $\boxed{\text{C}}$ $A-I$; $\boxed{\text{D}}$ $A+I$; $\boxed{\text{E}}$ I.

22. (3p) Se consideră polinomul $f=X^3-X^2-X+1\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Valoarea expresiei $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -3; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

23. (3p) Pe mulţimea $(0,+\infty)$ se consideră legea de compoziţie

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Soluţiile ecuaţiei $x \circ x = 1$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 3.

24. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^3$.
Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de inflexiune este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=2$; $\boxed{\text{B}}$ $y=\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $y=1$; $\boxed{\text{D}}$ $y=0$; $\boxed{\text{E}}$ $y=-1$.

25. (3p) Soluţiile ecuaţiei $2\sin x+\cos=3$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ nu are soluţii; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2π; $\boxed{\text{E}}$ $-\pi$.

26. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x)\,\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 0.

27. (3p) Limita $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 2.

28. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{3x+3}$.
Ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y=2x-1$; $\boxed{\text{B}}$ $y=x$; $\boxed{\text{C}}$ $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$;
$\boxed{\text{D}}$ nu are $\boxed{\text{E}}$ $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

29. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{2}{3}$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ π; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Varianta 38

1. (3p) Soluţiile numere complexe ale ecuaţiei $|z+1| = |z-1|$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $z = -iy$, $y \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $z = 1 + i$; $\boxed{\text{C}}$ $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$;
$\boxed{\text{D}}$ $z = x - i, x \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ $z = 1 - i$.

2. (3p) Valorile lui m pentru care ecuaţia $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$ are două rădăcini reale distincte sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $m \neq 1$; $\boxed{\text{B}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{C}}$ $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(0, +\infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(-\infty, 0)$.

3. (3p) Pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$, valoarea lui $\cos x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{2}{5}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{4}{5}$.

4. (3p) Stiind că $C_n^1 + C_n^2 = 10$, valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 10; $\boxed{\text{E}}$ 8.

5. (3p) Valoarea numărului complex $(1+i)^7 + (1-i)^7$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 16; $\boxed{\text{B}}$ $-4i$; $\boxed{\text{C}}$ $-8i$; $\boxed{\text{D}}$ $-2i$; $\boxed{\text{E}}$ $10 + 1$.

6. (3p) În planul Oxy se consideră triunghiul ABC, $A(4,0)$, $B(4,4)$, $C(2,2)$. Lungimea medianei dusă din C este:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $2\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

7. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = 3$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1, -1\}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, -2\}$.

8. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{e}{2}$.

9. (3p) În planul Oxy se consideră punctele A, B, C de coordonate $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(1,2)$. Valoarea ariei triunghiului ABC este:

A 8; B 1; C 6; D 12; E 10.

10. (3p) Soluţiile ecuaţiei $3^{x+1} + 3^{2x+1} - 1 = 0$ sunt:

A $\log_3\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$; B $\log_3\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$; C $\log_3\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$;
D $\log_3\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$; E $\log_3\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{3}\right)$.

11. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\cos(x+\pi) = \cos(x-\pi)$ sunt:

A $\{\pi, -\pi\}$; B $\{\pi, 0\}$; C $\{-\pi\}$;
D $x \in \mathbb{R}$; E $\{0\}$.

12. (3p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Matricea A^{2024} este:

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$.
Derivata funcţiei este:

A $(\sin x)^{\sin x} \cos x\,(\ln(\sin x) + 1)$; B $(\sin x)^{\sin x}(\ln(\sin x) + 1)$;
C $(\sin x)^{\sin x} \cos x$; D $(\sin x)^{\sin x} \cos x\,(\ln(\sin x))$;
E $(\cos x)^{\sin x} \cos x\,(\ln(\sin x) + 1)$.

14. (3p) Partea fracţionară a integralei $\displaystyle\int_0^4 \left(5x^4 - x + \frac{1}{8}\right) \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{4}$; B $-\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{8}$; D $\frac{2}{3}$; E $\frac{3}{4}$.

15. (3p) Se consideră funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.
Punctele de extrem ale funcţiei f sunt:

A $\frac{\pi}{3}$; B 0; C $\left\{\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$; D $\frac{\pi}{6}$; E $\frac{\pi}{4}$.

16. (3p) Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ este:

A 1; B 0; C -1; D $+\infty$; E $-\infty$.

17. (3p) Valoarea limitei $\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{1-x^4}-\frac{5}{1-x^5}\right)$ este:

A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{6}$; C $\frac{-1}{6}$; D $-\frac{1}{2}$; E $\frac{-4}{5}$.

18. (3p) Rădăcinile polinomului $X^3 - X - 6$ sunt:

A $\left\{-2, -1-\frac{3}{2}i\right\}$; B $\left\{-1+\frac{3}{2}i, -1-\frac{3}{2}i\right\}$; C $\{-2\}$;
D $\left\{-2, -1+\frac{3}{2}i\right\}$; E $\left\{-2, -1+\frac{3}{2}i, -1-\frac{3}{2}i\right\}$.

19. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\log_x(x+1) = 2$ sunt:

A $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; B $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; C $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; D $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; E $1+\sqrt{5}$.

20. (3p) Se consideră funcţia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin x - x$.
Punctele de extrem ale funcţiei sunt:

A $\frac{\pi}{3}$; B $\{0,\pi\}$; C $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$;
D $\frac{\pi}{2}$; E nu are puncte de extrem

21. (3p) Se consideră inelul A în care $a^2 = a$ pentru orice $a \in A$. Atunci valoarea lui $a + a$ este:

A a; B 0; C a^2; D $3a$; E $-a$.

22. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 0$ sunt:

A 3^2; B 2; C 3; D 1; E 2^3.

23. (3p) Soluţiile inecuaţiei $x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0$ sunt:

A $\left[\sqrt{-2+\sqrt{5}}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right]$;
B $\left[\sqrt{-2+\sqrt{5}}, +\infty\right)$; C $\left(-\infty, -\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right]$;
D $\left[\sqrt{-1+\sqrt{5}}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right]$;
E $\left[\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right]$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$.
Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f:

A 4; B 2; C 0; D 3; E 1.

25. (3p) Soluţiile ecuaţiei $|x+4|-\sqrt{x+4}=1$ sunt:

A $\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$; B $\dfrac{5}{2}$; C 0; D nu are soluţii; E -1.

26. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1\left(\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{2}$; B $\dfrac{\pi}{4}$; C $\dfrac{1}{4}$; D 1; E 0.

27. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\frac{x(x^2+\cos x)}{x^2+\sin^2 x+1}\right)\mathrm{d}x$ este:

A $\dfrac{1}{2}$; B -1; C 0; D 1; E 2.

28. (3p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Valoarea limitei derivatei $f'(x)$ în $x=0$ este:

A $\frac{1}{\mathrm{e}}$; B -1; C 1; D 0 E e.

29. (3p) Primitivele $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$ sunt:

A $-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$; B $\frac{1}{3}(\operatorname{ctg} x)^3+C$;
C $-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} x)^2+C$; D $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}(\operatorname{ctg} x)^3+C$;
E $-\operatorname{ctg} x-(\operatorname{ctg} x)^3+C$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ este:

A $+\infty$; B 0; C 1; D 2; E $\dfrac{1}{2}$.

Varianta 39

1. (3p) Pentru $z \in \mathbb{C}$, dacă $z + \dfrac{1}{z} = -1$, atunci valoarea lui $z^4 + \dfrac{1}{z^4}$ este:

A -1; B $2i$; C 2; D 1; E i.

2. (3p) Valorile lui m pentru care sistemul $\begin{cases} x + my = 0 \\ mx + 2y = 0 \end{cases}$ are soluţie unică sunt:

A $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, +\infty)$; B $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$; C $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$;

D $(0, +\infty)$; E $(-\infty, -\sqrt{2})$.

3. (3p) Numerele $a_1, \ldots, a_{10}$ sunt în progresie aritmetică. Suma lor este 100, iar raţia $\frac{1}{3}$ Valoarea primului termen este:

A 1; B $\dfrac{7}{2}$; C $\dfrac{3}{2}$; D $\dfrac{5}{2}$; E $\dfrac{17}{2}$.

4. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x^2+1} + x^2 - 1 = 0$ sunt:

A $\dfrac{1}{2}$; B 0; C 1; D -1; E 2.

5. (3p) Coeficientul lui $\frac{1}{\sqrt{x}}$ din $\left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \left(4 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$ este:

A -4; B -3; C 4; D -2; E 0.

6. (3p) În planul Oxy se consideră triunghiul ABC, unde $A(-2, -2)$, $B(2, 2)$, $C(3, -3)$. Triunghiul ABC este:

A dreptunghic; B echilateral; C oarecare; D isoscel; E obtuzunghic.

7. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3} = 3$ sunt:

A $\dfrac{11}{4}$; B $\dfrac{3}{4}$; C $\dfrac{9}{4}$; D 2; E $\dfrac{13}{4}$.

8. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \searrow 0} (\sin x)^x$ este:

A 1; B 0; C $+\infty$; D $\dfrac{\pi}{4}$; E π.

9. **(3p)** În planul Oxy se consideră punctele A, B, C de coordonate $A(-1,0)$, $B(0,5)$, $C(-1,6)$. În triunghiul ABC lungimea înălţimii dusă din A este:

$\boxed{\text{A}}$ $8\sqrt{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $3\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $6\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $5\sqrt{2}$.

10. **(3p)** Soluţiile ecuaţiei $9^x + 5 \cdot 3^x - 6 = 0$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\log_3 2$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ -1.

11. **(3p)** Pentru $|x| \geq 2$ soluţiile ecuaţiei $\sin\left(\frac{4}{1+x^2}\right) = \sin\left(\frac{5}{4+x^2}\right)$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\sqrt{11}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{11\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\sqrt{11}, -\sqrt{11}\right\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{-\sqrt{11}\right\}$.

12. **(3p)** Inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. **(3p)** Se consideră funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.
Derivata funcţiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{x^{\sqrt{x}}}{x}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}(\ln x + 1)$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{x^{\sqrt{x}}}{x}(\ln x + 1)$.

14. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $(\ln 2)^2$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}(\ln 2)$; $\boxed{\text{D}}$ 1;
$\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

15. **(3p)** Se consideră funcţia $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Punctele de extrem ale funcţiei f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ $\{0,1,-1\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{-1,1\}$;
$\boxed{\text{E}}$ nu are puncte de extrem

16. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ $\mathrm{e}+1$.

17. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\mathrm{tg}x-x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\dfrac{-1}{6}$.

18. (3p) Se consideră punctele de coordonate $A\,(3,0)$, $B\,(0,3)$, $C(-3,0)$, $D(0,-3)$. Aria patrulaterului $ABCD$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 9; $\boxed{\text{B}}$ 24; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 32; $\boxed{\text{E}}$ 18.

19. (3p) Valorile lui m pentru care $\det\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}\neq 0$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}\setminus\{2,1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

20. (3p) Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f\,(x)=\int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t+\int_0^x \arccos t\mathrm{d}t.$$

Derivata funcţiei f, $f'(x)$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\sin x+\cos x$; $\boxed{\text{B}}$ $\sin x$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{2}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\sin x-\cos x$; $\boxed{\text{E}}$ $-\sin x+\cos x$

21. (3p) În inelul $\mathbb{Z}_6$ soluţiile ecuaţiei $\widehat{x}\cdot\widehat{3}=\widehat{0}$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\widehat{0},\widehat{2}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\widehat{0},\widehat{1},\widehat{3}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left\{\widehat{0}\right\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\left\{\widehat{0},\widehat{4}\right\}$.

22. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\log_2 x+\log_4 x=\log_2 x^2$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ 16.

23. (3p) Se consideră ecuaţia $x^3+x^2+x+1=0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Valoarea lui $x_1^4+x_2^4+x_3^4$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 10.

24. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a,\ x\in(-\infty,0) \\ bx-5,\ x\in[0,+\infty) \end{cases}.$$

Valorile lui a, b pentru care funcţia este derivabilă în $x=0$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $a=-3, b=3$; $\boxed{\text{B}}$ $a=-5, b=2$; $\boxed{\text{C}}$ $a=-4, b=3$;
$\boxed{\text{D}}$ $a=-5, b=2$; $\boxed{\text{E}}$ $a=-5, b=3$.

25. (3p) Se consideră polinomul $(x+4)^3-(2x-3)^5$,suma coeficienţilor polinomului este:

$\boxed{\text{A}}$ 126; $\boxed{\text{B}}$ 124; $\boxed{\text{C}}$ 112; $\boxed{\text{D}}$ 127; $\boxed{\text{E}}$ 125.

26. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^2\left(2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}\right)\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $3\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $3\ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $5\ln 2$; $\boxed{\text{E}}$ $-\ln 2$.

27. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi}x^3\cos x\mathrm{d}x$ este :

$\boxed{\text{A}}$ 2π; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 8π; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $2\pi\sqrt{2}$.

28. (3p) Se consideră şirul definit astfel $x_1=3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n}$ pentru $n\geq 2$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $x=2$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ nu are limită $\boxed{\text{E}}\dfrac{3}{2}$.

29. (3p) Primitivele $\displaystyle\int\cos^2 x\mathrm{d}x$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; $\boxed{\text{C}}$ $x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;
$\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}x+\sin 2x+C$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}$.

Varianta 40

1. (3p) Pentru $z \in \mathbb{C}$, dacă $z + \frac{1}{z} = 1$, atunci valoarea lui $z^6 + \frac{1}{z^6}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $-2i$; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $2i$.

2. (3p) Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} mx + 4my = 0 \\ x + m^2 y = 0 \end{cases}$ are o infinitate de soluţii sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{2, -2\}$; $\boxed{\text{B}}$; $\{0, 2\}$ $\boxed{\text{C}}$; 2
$\boxed{\text{D}}$ $\{0, 2, -2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0, -2\}$.

3. (3p) Se consideră progresia aritmetică $2, 4, 6, \ldots$. Suma primilor 100 de termeni de rang par este:

$\boxed{\text{A}}$ 20000; $\boxed{\text{B}}$ 400; $\boxed{\text{C}}$ 10000; $\boxed{\text{D}}$ 30000 $\boxed{\text{E}}$ 22000.

4. (3p) Partea reală a numărului $\frac{1+i}{1-i} + \frac{2-i}{2+i}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{5}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{3}{5}$.

5. (3p) Coeficientul lui x^2 din $(4 + \sqrt{x})^7$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 224; $\boxed{\text{B}}$ 420; $\boxed{\text{C}}$ 2240; $\boxed{\text{D}}$ 300; $\boxed{\text{E}}$ 150.

6. (3p) Soluţiile sistemului $\begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \\ \cos(x + y) = \cos y \end{cases}$, $x, y \in [0, \pi]$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x = 0, y = 0, x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $x = \pi, y = \pi$;
$\boxed{\text{C}}$ $x = 0, y = \pi$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 0, y = 0$ şi $x = \pi, y = \pi$;
$\boxed{\text{E}}$ $x = \pi, y = 0$.

7. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = 2$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{4}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{5}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{1, 2\}$.

8. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^4 + 2n}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1;
$\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

9. (3p) În planul Oxy se consideră punctele A, B, C, D de coordonate $A(1,0)$, $B(4,0)$, $C(7,3), D(4,3)$. tangenta unghiului $\widehat{DAB}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

10. (3p) Valorile lui $a \in \mathbb{R}$, pentru care ecuaţia $9^x - 5 \cdot 3^x + a = 0$ are două soluţii sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\left(0, \frac{25}{4}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $(0, +\infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0, 5)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left(-\infty, \frac{25}{4}\right)$;
$\boxed{\text{E}}$ $(-\infty, 0)$.

11. (3p) Soluţiile ecuaţiei $x + 2 - \sqrt{x+2} - 6 = 0$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $x = \{-2, 3\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{7, 2\}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\{2, 3\}$; $\boxed{\text{E}}$ 7.

12. (3p) Inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x+1}$.
Asimptota oblică la $+\infty$ a funcţiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x - 3$; $\boxed{\text{C}}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$; $\boxed{\text{E}}$ $y = 3x - \frac{1}{9}$.

14. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$.
Derivata funcţiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$; $\boxed{\text{B}}$ $x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$; $\boxed{\text{C}}$ $2x \cos \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$;
$\boxed{\text{D}}$ $2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$; $\boxed{\text{E}}$ $2x \sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$.

15. (3p) Se consideră funcţia $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Punctele de extrem ale funcţiei f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ $\{0,1\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0,-1\}$.

16. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 4.

17. **(3p)** Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{-1}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{5}{6}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{6}$.

18. **(3p)** Se consideră punctele de coordonate $A\,(-1,0)\,,B\,(0,1)\,,C(-3,0)$. Aria triunghiului ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{5}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{3}{2}$.

19. **(3p)** Valorile lui m pentru care ecuaţia $x^4-x^2+m=0$ are exact două rădăcini reale distincte, sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty,0)$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup(-\infty,0)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{\frac{-1}{4}\right\}\cup(-\infty,0)$.

20. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_{1/2}^{3/4}(\text{arctg } t\mathrm{d}t+\text{arcctg } t)\,\mathrm{d}t$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi}{8}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ π; $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{4\pi}{3}$

21. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)$. Valoarea lui $(f\circ f\circ f\circ f)\,(0)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln(\ln 2)$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 3$.

22. **(3p)** Soluţiile ecuaţiei $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=\log_2 x$ sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1+2\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 1.

23. **(3p)** Dacă tg $x=\frac{1}{2}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ atunci valoarea lui $\sin x$ este:

A $\frac{2}{\sqrt{5}}$; B $\frac{3}{\sqrt{5}}$; C $\frac{1}{\sqrt{5}}$; D $\frac{1}{\sqrt{3}}$; E $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax+3,\ x\in(-\infty,0) \\ \sin x+b,\ x\in[0,+\infty) \end{cases}.$$

Valorile lui a,b pentru care funcţia este derivabilă în $x=0$ sunt:

A $a=1,b=3$; B $a=2,b=3$; C $a=-1,b=2$;
D $a=1,b=0$; E $a=1,b=-3$.

25. (3p) Se consideră polinomul $(x+4)^2-(2x-3)^5$. Suma coeficienţilor polinomului este:

A 25; B 27; C 28; D 24; E 26.

26. (3p) Valoarea integralei $\int_0^{\pi}(2\mathrm{e}^x\cos 2x+\mathrm{e}^x\sin 2x)\,\mathrm{d}x$ este:

A 0; B 2e; C e^{π}; D $2\mathrm{e}^{\pi}$; E 1.

27. (3p) Valoarea integralei $\int_{-4}^{4}\frac{x}{x^2+4}\ln(x^2+1)\mathrm{d}x$ este :

A 1; B 0; C $-\ln 17$; D $\ln 17$; E $2\ln 17$.

28. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$ este:

A 1; B $x=-1$; C 0;
D $+\infty$ E $-\infty$.

29. (3p) Primitivele $\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$ sunt:

A $e^x(\sin x+\cos x)+C$; B $2e^x(\sin x+\cos x)+C$;
C $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$; D $e^x\sin x+C$;
E $e^x(\sin x-\cos x)+C$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x-\operatorname{tg} x}{x}$ este:

A 2; B $+\infty$; C 0; D -1; E $\frac{1}{2}$.

Varianta 41

1. (3p) Rezultatul calculului $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}-2\left|3-\sqrt{2}\right|+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$ este:

A $4\sqrt{2}-5$; B $1-\sqrt{2}$; C 1; D 5; E $\frac{1}{4}$.

2. (3p) Termenul b_{2021} al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geqslant 1}$ cu $b_{2023}=3200$, iar $b_{2020}=50$ este:

A 500; B 200; C 100; D 4; E 64.

3. (3p) Probabilitatea ca alegând un număr de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 5 este:

A $0,9$; B $0,63$; C $0,8$; D $0,6$; E $0,5$.

4. (3p) Valoarea numărului real a pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to[a,\infty)$, $f(x)=x^2-3x+2$ este surjectivă este:

A $-\frac{3}{2}$; B $\frac{-3}{2}$; C -3; D -1; E $-\frac{1}{4}$.

5. (3p) Modulul numărului z^4 unde $z=2+2i$, este:

A 2; B 4; C 16; D 32; E 64.

6. (3p) Se dau punctele $A(2,5)$, $B(-3,0)$, $C(5,0)$, iar M, N mijloacele segmentelor AB, respectiv AC. Lungimea segmentului MN este:

A 1; B $5\sqrt{2}$; C $\sqrt{180}$; D 4; E $\sqrt{5}$.

7. (3p) Suma numerelor reale a pentru care vectorii $\overrightarrow{u}=(a+1)\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v}=(a+2)\overrightarrow{i}$ sunt ortogonali este:

A 1; B 3; C -1; D -4; E -3.

8. (3p) Se dau punctele $A(-3,5)$ şi $B(4,-1)$, iar M este mijlocul segmentelui AB. Abscisa simetricului mijlocului segmentului AB faţă de originea sistemului de coordonate este:

A 1; B 3; C $\frac{-1}{2}$; D -2; E $\frac{-3}{2}$.

9. (3p) Dacă $\sin x=\frac{3}{5}$, să se afle $\cos x$ dacă $x\in\left(\frac{11\pi}{4},\frac{13\pi}{4}\right)$.

A 1; B 3; C $\frac{4}{5}$; D -2; E alt răspuns.

10. (3p) Fie ecuaţia matriceală $AX = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei X este:

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 5; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{4}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ -2; $\boxed{\text{E}}$ alt răspuns.

11. (3p) Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci numărul natural a pentru care $\det(A^2) = 4$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ -2; $\boxed{\text{E}}$ nu există un astfel de număr.

12. (3p) Fie legea de compoziţie $x \circ y = xy - 4x - y + 5$. Rezultatul calculului $1 \circ 2 \circ 3 \circ \cdots \circ 2023$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2023; $\boxed{\text{D}}$ 2022; $\boxed{\text{E}}$ alt răspuns.

13. (3p) Fie legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 2y + 8$. Elementul neutru al acesteia este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ 5; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ 8.

14. (3p) Fie sistemul de ecuaţii liniare $\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = 1$, $\forall i = \overline{1,3}$, unde $a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{dacă } i = j \\ 1, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$. Suma soluţiilor sistemului este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{3}{2}$.

15. (3p) Determinantul matricei $A = (a_{ij})_{\,i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = \max(i,j)$, este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 4.

16. (3p) Se consideră polinomul $f = X^{n^2+n} - X^{2n+1} + 1$. Rezultatul calculului $f(-1) + f(0) + f(1)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 5.

17. (3p) Dacă polinomul $f = 3X^3 + aX^2 + aX + 3$ are două rădăcini inverse atunci cea de-a treia rădăcină este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ -3.

18. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(3n^2+n)}{3n^2+n}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ ∞; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

19. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+3^x+5^x}{1+2^x+7^x}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{5}{7}$; $\boxed{\text{D}}$ ∞; $\boxed{\text{E}}$ 0.

20. (3p) Asimptotele funcţiei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ pe domeniul maxim de definiţie D_f sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 1, x = 1, x = 2$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x + 1, x = 2$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 1, x = 2$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 2, y = x$; $\boxed{\text{E}}$ $x = 1, y = x - 2$.

21. (3p) Derivata funcţiei $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+x+1) - \sin(2x)$ în punctul $x = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ 2.

22. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{pentru} \quad x \le 0 \\ x^2 e^x + bx & \text{pentru} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Suma $a + b$ pentru care f este derivabilă este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ -3; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 1.

23. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $e - 1$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{e}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{e^2+2e-1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $e^2 - 2$.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$. Aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele $x = 0$, $x = 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $e-2$; $\boxed{\text{C}}$ $1-e$; $\boxed{\text{D}}$ $2-e$; $\boxed{\text{E}}$ $y=e-1$.

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{2}^{n}\frac{1}{x\,(x-1)}dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

26. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ e^2; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

27. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{pentru} \quad x\leq 1 \\ x^2e^x & \text{pentru} \quad x\geq 1 \end{cases}.$$

Valoarea integralei $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ e^2; $\boxed{\text{C}}$ $e^2+\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{4e^2-2e+1}{2}$.

28. (3p) Valoarea absolută a integralei $\int\limits_{0}^{1}\ln(x+1)\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $2\ln 2-1$; $\boxed{\text{C}}$ $1-\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln 2-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 2.

29. (3p) Derivata funcţiei $F(x)=\int\limits_{0}^{x}\sin t^2dt$ în punctul $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\sin 1$; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

30. (3p) Valoarea integralei $\int\limits_{0}^{1}|2x-1|$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{2}$.

Varianta 42

1. (3p) Rezultatul calculului

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1057}+\sqrt{1058}}$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{1058}$; $\boxed{\text{B}}$ $22\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{1057}-\sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{1058}-1$.

2. (3p) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel ca $x^2-4x+y^2-6y+13=0$. $S=x+y$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 13; $\boxed{\text{C}}$ 6; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{13}$.

3. (3p) Fie $A=\{x\in\mathbb{Z}|\,|x-2|\leq 3\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R}|x^3+x^2-2x-2=0\}$. Suma elementelor mulţimii $A\cap B$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ $2\sqrt{2}-1$; $\boxed{\text{D}}$ 3; $\boxed{\text{E}}$ 5.

4. (3p) Valoarea numărului real d pentru care funcţia $f:[d,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ este injectivă este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{-3}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{1}{4}$.

5. (3p) Produsul solutiilor ecuatiei $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}=1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 7; $\boxed{\text{E}}$ 12.

6. (3p) Se dau punctele $A(0,6)$, $B(-3,0)$ şi $C(3,0)$. Ordonata centrului de greutate al triunghiului este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ $5\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 4; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{5}$.

7. (3p) Numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u}=(a+1)\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v}=(a+2)\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$ sunt paraleli este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 3; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ -4; $\boxed{\text{E}}$ -3.

8. (3p) Se dau punctele $A(-3,5)$ şi $B(4,-1)$, iar C este simetricul lui A faţă de B. Suma coordonatelor punctului C este:

$\boxed{\text{A}}$ 11; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{-1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ -7; $\boxed{\text{E}}$ 3.

9. (3p) Două dintre unghiurile unui triunghi au $23°15'$, respectiv $80°50'$. Măsura celui de-al treilea unghi este:

A $77°45'$; B $75°$; C $76°55'$; D $75°55'$; E alt răspuns.

10. (3p) Fie ecuaţia matriceală $XA = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Urma matricei X este:

A 10; B 5; C $\frac{4}{5}$; D -2; E 2.

11. (3p) Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Produsul numerelor naturale a şi b pentru care $\det(A(a) \cdot A(b)) = 1$ este:

A 1; B 3; C 0; D -2; E nu există un astfel de numere.

12. (3p) Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 - X + 3$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi legea de compozitie

$$x \circ y = xy + (x_1 + x_2 + x_3)x + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot y - 6.$$

Atunci expresia $3 \circ 4 \circ 5 \circ \cdots \circ 2024$ este egală cu:

A 1; B 4; C 2024; D -6; E 3.

13. (3p) Numărul de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este:

A 1; B 3; C 5; D 4; E 6.

14. (3p) Fie sistemul liniar $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = 1$, pentru orice $i = \overline{1,3}$, unde $a_{ij} = |i - j|$. Suma soluţiilor sistemului este:

A 0; B $\frac{3}{4}$; C $\frac{1}{4}$; D $\frac{1}{2}$; E 1.

15. (3p) Determinantul matricei $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, $a_{ij} = \min(i,j)$, este:

A 2; B 0; C 1; D 3; E 4.

16. (3p) Se consideră polinomul $f = X^{n^2+n} - X^{2n+1} + X - 1$. Restul împărţirii polinomului la $X + 1$ este:

A 4; B 1; C 3; D 0; E 5.

17. (3p) Dacă polinomul $f = 3X^3 + 3X^2 + aX + 3$ are două rădăcini opuse atunci cea de-a treia rădăcină este:

A 0; B 1; C -1; D 3; E -3.

18. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ este:

A ∞; B -1; C 0; D 1; E $-\infty$.

19. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-1}{(1+x)^7-1}$ este:

A e; B $\frac{7}{5}$; C $\frac{5}{7}$; D ∞; E 0.

20. (3p) Asimptotele funcţiei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ pe domeniul maxim de definiţie D_f sunt:

A $y = 1, x = -2$; B $y = x - 1, x = -2$; C $y = x - 1, x = -2$;
D $x = 2, y = x$; E $x = -2, y = x - 2$.

21. (3p) Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (3 + \sin x) \ln\left(x^2 + 1\right)$$

în punctul $x = 0$ este:

A 0; B 6; C 10; D 3; E 2.

22. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{pentru} \quad x \le 0 \\ \frac{\sin(3x)}{x} & \text{pentru} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Valoarea a pentru care f este continuă este:

A -1; B 4; C 3; D 0; E 1.

23. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}\,dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ 2.

24. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$. Aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele $x = 0$, $x = 1$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $-1 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$; $\boxed{\text{C}}$ $2\sqrt{3}\pi - 1$; $\boxed{\text{D}}$ $2 - \frac{\pi}{3}$; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2 - 1$.

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ 0; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

26. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{[x] + x}{|x - 2|}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 5; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $\ln 2$.

27. (3p) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru} \quad x \leq 1 \\ x \ln x & \text{pentru} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\, dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ e^2; $\boxed{\text{C}}$ $e^2 + \frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5+2e^2}{8}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

28. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ $\sin 1$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

29. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt}{x^2}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ e^{-1}; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

30. (3p) Valoarea integralei $\int\limits_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{e}{2} - \frac{1}{2}$.

Varianta 43

1. (3p) Se consideră progresia geometrică 2, 6, 18, ... Suma primilor 40 de termeni ai acestei progresii este:

A 3^{40}; B $3^{40}-1$; C $3^{40}+1$; D $3^{41}-1$; E $3^{39}-1$.

2. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3(b+1)x+1+b$. Mulţimea valorilor parametrului $b\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f are un singur punct comun cu axa Ox este:

A $\{-1\}$; B $\left\{-\frac{5}{9}\right\}$; C $\left\{-1,\frac{5}{9}\right\}$; D $\left\{-1,-\frac{5}{9}\right\}$; E $\left\{1,\frac{5}{9}\right\}$.

3. (3p) Valoarea modulului numărului complex $z=\dfrac{1+\sqrt{5}i}{1-\sqrt{5}i}$ este:

A $\dfrac{1}{3}$; B $\dfrac{2}{3}$; C $\frac{\sqrt{5}}{3}$; D $\frac{\sqrt{2}}{3}$; E 1.

4. (3p) Soluţia ecuaţiei $\ln(5x+6)=\ln(3x+1)+1$ este:

A $\frac{e-6}{5-3e}$; B $\dfrac{e-4}{5-3e}$; C $\frac{e-6}{5-e}$; D $\frac{e-6}{2-3e}$; E $\frac{e-6}{5-7e}$.

5. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe x^3 în dezvoltarea $\left(x+\dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)^6$ este:

A $C_6^3 6^3$; B $C_6^4 6^4$; C $C_6^2 6^2$; D $C_6^5 6^5$; E $C_6^2 6^3$.

6. (3p) În planul Oxy se consideră triunghiul ABC, de vârfuri $A(1,1)$, $B(-3,5)$, $C(-3,3)$. Lungimea medianei duse din B este:

A $3\sqrt{2}$; B $\sqrt{7}$; C $\sqrt{53}$; D $\sqrt{5}$; E $\sqrt{13}$.

7. (3p) Ştiind că $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ şi $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, atunci numărul $2\sin x+6\cos x$ este egal cu:

A $\sqrt{3}+3$; B $-\sqrt{3}+3$; C $2\sqrt{3}+3$; D $-\sqrt{3}-3$; E $\sqrt{3}-3$.

8. (3p) Valoarea lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+\dfrac{1}{4}\vec{j}$ sunt ortogonali este:

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{5}{4}$; $\boxed{\text{E}}$ -1.

9. (3p) În triunghiul ABC avem $AC = 2\sqrt{3}$ şi $m\left(\widehat{B}\right) = 60°$. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $3\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

10. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Valoarea lui $(f \circ f)(2)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 26; $\boxed{\text{B}}$ 25; $\boxed{\text{C}}$ 24; $\boxed{\text{D}}$ 6; $\boxed{\text{E}}$ 17.

11. (3p) Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{R}$ ale ecuaţiei $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{1,3\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-1,0\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1,3\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{0,1\}$.

12. (3p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Matricea A^3 este:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{E}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. (3p) Se consideră funcţia $f : (3,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$. Asimptota verticală la graficul funcţiei f are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $x = -3$; $\boxed{\text{B}}$ $x = 3$; $\boxed{\text{C}}$ $x = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x = 1$; $\boxed{\text{E}}$ $x = 7$.

14. (3p) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ -1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ e; $\boxed{\text{E}}$ -e.

15. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei f este:

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ 3.

16. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$. Numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f este:

A 2; B 0; C 1; D 3; E 4.

17. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+16}$ este:

A $\ln\frac{16}{17}$; B $\ln\frac{17}{16}+\frac{\pi}{16}$; C $\ln\frac{17}{16}-\frac{\pi}{16}$; D $\dfrac{\pi}{6}$; E $\ln\frac{17}{16}$.

18. **(3p)** Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+9x-18}{x-2}$ este:

A ∞; B -5; C 13; D 5; E $-\infty$.

19. **(3p)** Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+5}{x^2+4}\mathrm{d}x$ este:

A $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{4}+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$; B $\ln\frac{13}{4}+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$; C $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{4}+\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$;
D $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{4}-\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$; E 0.

20. **(3p)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2+9}}$. Atunci, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, valoarea derivatei $f'(x)$ este:

A $\dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$; B $\dfrac{27-2x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$; C $\dfrac{27-2x}{\sqrt{x^2+9}}$;
D $\dfrac{-2x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$; E $\dfrac{27-x}{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}$.

21. **(3p)** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&5\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Atunci $\det(A)$ este:

A 15; B 0; C 12; D -10; E 5.

22. **(3p)** Se consideră polinomul $f=X^4+4X^3+2X^2+5x-7\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Valoarea expresiei $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ este:

A $\frac{7}{5}$; B $-\frac{5}{7}$; C 5; D $\frac{5}{7}$; E 7.

23. **(3p)** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x\circ y=xy-2x-2y+6.$$

Elementul neutru este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 3; $\boxed{\text{D}}$ -3; $\boxed{\text{E}}$ 2.

24. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x+x$. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$ are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $y=2x-1$; $\boxed{\text{B}}$ $y=2x+1$; $\boxed{\text{C}}$ $y=x+1$;
$\boxed{\text{D}}$ $y=2x$; $\boxed{\text{E}}$ $y=-1$.

25. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}-\dfrac{x^2-2x}{x+1}\right)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 6; $\boxed{\text{B}}$ -6; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ 1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

26. (3p) Se consideră polinomul $f=2X^4+3X^3+4X^2+3X+2\in\mathbb{R}[X]$. Suma modulelor rădăcinilor din $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ale polinomului f este:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{D}}$ -4; $\boxed{\text{E}}$ 0.

27. (3p) Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x\mathrm{T}y=(x-2)(y-2)+2.$$

Calculaţi $10\mathrm{T}9\mathrm{T}8\cdots\mathrm{T}1\mathrm{T}0$.

$\boxed{\text{A}}$ -2; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ 50; $\boxed{\text{E}}$ 2.

28. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-4x+3)e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcţiei f. Atunci mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei F este:

$\boxed{\text{A}}$ $\{-1,3\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{1,-3\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{1,3\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{1,2\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\{2,3\}$.

29. (3p) Determinaţi primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.

$\boxed{\text{A}}$ $x+\mathrm{arctg}x+C$; $\boxed{\text{B}}$ $x-2\mathrm{arctg}x+C$; $\boxed{\text{C}}$ $x+\ln(x^2+1)+C$;
$\boxed{\text{D}}$ $x+2\mathrm{arctg}x+C$; $\boxed{\text{E}}$ $x+3\mathrm{arctg}x+C$.

30. (3p) Calculaţi $\displaystyle\int\frac{x\sqrt{x^2+4}+2}{x^2+4}dx$.

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{x^2+4}+2\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{x^2+4}+\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+C$;

$\boxed{\text{C}}$ $2\sqrt{x^2+4}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{x^2+4}+2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$;

$\boxed{\text{E}}$ $-\sqrt{x^2+4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$.

Varianta 44

1. (3p) Fie numărul complex $z = \frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$. Atunci z^2 este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{256}{100}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{236}{100}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{256}{10}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{236}{10}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{10}$.

2. (3p) În reperul cartezianxOy se dau punctele $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(6,7)$. Dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci lungimea segmentului CM este:

$\boxed{\text{A}}$ $4\sqrt{3}$; $\boxed{\text{B}}$ $4\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $5\sqrt{3}$.

3. (3p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + a$. Dacă punctul $A(1,0)$ aparţine graficului funcţiei f, atunci punctul B de intersecţie al graficului funcţiei f cu axa Oy este:

$\boxed{\text{A}}$ $B(0,4)$; $\boxed{\text{B}}$ $B(5,0)$; $\boxed{\text{C}}$ $B(0,5)$; $\boxed{\text{D}}$ $B(0,3)$; $\boxed{\text{E}}$ $B(1,5)$.

4. (3p) Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul $A(2,3)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $-2x + y + 7 = 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 2x + 1$; $\boxed{\text{B}}$ $y = \frac{1}{2}x - 1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = -2x - 1$;
$\boxed{\text{D}}$ $y = 3x - 1$; $\boxed{\text{E}}$ $y = 2x - 1$.

5. (3p) Soluţia inecuaţiei $\dfrac{-2x+3}{x^2 - 3x + 2} \le 0$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(1, \frac{3}{2}]$; $\boxed{\text{B}}$ $(2, +\infty)$; $\boxed{\text{C}}$ $(1, \frac{3}{2}] \cup (3, +\infty)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(1, \frac{3}{2}] \cup (2, +\infty)$; $\boxed{\text{E}}$ $(1, \frac{5}{2}] \cup (3, +\infty)$.

6. (3p) Dacă $\sin x = \frac{3}{4}$ şi $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, atunci $\sin 2x$ este egal cu:

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{3\sqrt{7}}{6}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3\sqrt{7}}{8}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{\sqrt{7}}{8}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$; $\boxed{\text{E}}$ $-\frac{5\sqrt{7}}{8}$.

7. (3p) Ecuaţia $(3x+4)^2 = (2x+3)^2$ are soluţiile reale:

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{-\frac{7}{5}, -1\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{7}{5}, -1\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{-\frac{7}{5}, 1\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\left\{\frac{6}{7}, 2\right\}$; $\boxed{\text{E}}$ $\left\{\frac{5}{7}, 1\right\}$.

8. (3p) Se consideră vectorii: $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3a\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Valoarea numărului real a pentru care vectorii sunt coliniari este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{7}{21}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{21}{8}$; $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{8}{21}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{8}{19}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{8}{21}$.

9. (3p) Ecuaţia $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 5 = 0$ are soluţiile reale:

A $\{1, 1-\log_5 2\}$; B $\{0, 1+\log_5 2\}$; C $\{0, \log_5 2\}$;
D $\{0, 1-\log_5 2\}$; E $\{1, 3-\log_5 2\}$.

10. (3p) Suma primilor 8 termeni ai unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ penru care $a_1 = 3$ şi $a_2 = 15$ este:

A $\frac{5}{4}(5^8-1)$; B $\frac{3}{4}(5^8-1)$; C $\frac{3}{4}(5^7-1)$;
D $\frac{3}{5}(5^8-1)$; E $\frac{5}{4}(5^8-1)$.

11. (3p) Modulul numărului complex $z = \frac{6+7i}{5+4i}$ este:

A $\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{85}}$; B $\frac{\sqrt{85}}{\sqrt{43}}$; C $\frac{\sqrt{3485}}{41}$; D $\frac{\sqrt{79}}{\sqrt{41}}$; E $\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{79}}$.

12. (3p) În mulţimea numerelor reale inecuaţia $\dfrac{e^x-1}{x+2} \leq 0$ are soluţia:

A $(-2, 2]$; B $(-2, 0]$; C $(-1, 0]$; D $(-2, 0)$; E $(-2, 1]$.

13. (3p) Să se determine polinomul $f = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(0) = 4$ şi $f(2) = 8$.

A X^2+4; B X^2+2X+4; C X^2+5;
D X^2+2X+4; E X^2+3X-4.

14. (3p) Calculaţi: $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{50}$.

A $-\frac{2i}{1-i}$; B $\frac{3i}{1-i}$; C $\frac{2i}{1-i}$; D $\frac{-1+2i}{1-i}$; E $\frac{12i}{1-i}$.

15. (3p) Solutia inecuaţiei $\dfrac{x+7}{x-3} < \dfrac{1}{3}$ este:

A (-12,-3); B $(-12, 2)$; C $(-10, 3)$; D $(-12, 1)$; E $(-12, 3)$.

16. (3p) În planul cartezian se consideră vectorii $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$. Numărul real k pentru care vectorii sunt coliniari este:

A $-\frac{18}{7}$; B $\frac{18}{7}$; C $\frac{7}{18}$; D $\frac{16}{7}$; E $\frac{18}{5}$.

17. (3p) Fie triunghiul ABC având $A(0,0)$; $B(1,2)$. Coordonatele vârfului C astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral sunt:

A $\left\{(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}), (\frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})\right\}$; B $\left\{(\frac{1+5\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}), (\frac{1-5\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})\right\}$;

C $\left\{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-4\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+4\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$; D $\left\{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$;

E $\left\{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-5\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+5\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

18. (3p) Calculând $\sin 75° + 3\sin 105°$ obţinem:

A $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; B $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; C $-\sqrt{6}+\sqrt{2}$;
D $-\sqrt{6}-\sqrt{2}$; E $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

19. (3p) (5p) 1. Fie numerele complexe $z_1 = 6+3\mathrm{i}$, $z_2 = 8+9\mathrm{i}$. Calculând $E = z_1 + z_2 + \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z, obţinem:

A $35+66\mathrm{i}$; B $35-66\mathrm{i}$; C $32-66\mathrm{i}$;
D $35+63\mathrm{i}$; E $32+62\mathrm{i}$.

20. (3p) Calculaţi $7\sqrt{2}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

A $9\sqrt{2}$; B $9\sqrt{3}$; C $8\sqrt{2}$; D $9\sqrt{5}$; E $6\sqrt{3}$.

21. (3p) Fie $A(3,4), B(5,8)$. Ecuaţia dreptei d paralelă cu dreapta AB ce trece prin punctul $C(2,-3)$ este:

A $y = 2x-8$; B $y = x-7$; C $y = 2x+3$;
D $y = -x-7$; E $y = 2x-7$.

22. (3p) Soluţia inecuaţiei $\dfrac{x^2-9}{1-2x} \le 0$ este:

A $[-5,\frac{1}{2})\cup[3,+\infty)$; B $[0,\frac{1}{2})\cup[3,+\infty)$; C $[-3,\frac{7}{2})\cup[3,+\infty)$;

D $[-3,\frac{1}{2})\cup[3,+\infty)$; E $[-3,\frac{1}{2})\cup[5,+\infty)$.

23. (3p) Soluţia ecuaţiei: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+2} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2x+9}$ este:

A $(\frac{5}{3},+\infty)$; B $(\frac{3}{7},+\infty)$; C $(\frac{7}{3},+\infty)$;
D $(\frac{7}{3},11)$; E $(-\frac{7}{3},+\infty)$.

24. (3p) Fie triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $\mathrm{m}\left(\widehat{ABC}\right) = 60°$. Atunci AC şi raza cercului circumscris triunghiului ABC sunt:

$\boxed{A}$ $AC=\sqrt{45}$ cm, $R=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}$ cm; $\boxed{B}$ $AC=\sqrt{39}$ cm, $R=\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3}}$ cm;
$\boxed{C}$ $AC=\sqrt{43}$ cm, $R=\frac{\sqrt{43}}{\sqrt{2}}$ cm; $\boxed{D}$ $AC=\sqrt{44}$ cm, $R=\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}}$ cm;
$\boxed{E}$ AC=$\sqrt{43}$ cm, $R=\frac{\sqrt{43}}{\sqrt{3}}$ cm.

25. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|\,e^x$.

Atunci $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$ este:

$\boxed{A}$ $2e-4e^{-2}$; $\boxed{B}$ $3e-4e^{-2}$; $\boxed{C}$ $2e-4e^{-3}$;
$\boxed{D}$ $3e-2e^{-2}$; $\boxed{E}$ $2e+4e^{-2}$.

26. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+5}$.

Atunci $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_{3x}^{4x} f(t)dt}{x}$ este:

$\boxed{A}$ $\frac{5}{4}$; $\boxed{B}$ $-\frac{4}{5}$; $\boxed{C}$ $\frac{4}{5}$; $\boxed{D}$ $\frac{3}{2}$; $\boxed{E}$ $\frac{2}{15}$.

27. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+a & \text{dacă } x\in(-\infty,1]\\ 2x+4 & \text{dacă } x\in(1,4)\\ e^{x-4}+11 & \text{dacă } x\in[4,+\infty)\end{cases}$.

Atunci $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\frac{f(x)-12}{x-4}$ este:

$\boxed{A}$ -1; $\boxed{B}$ 0; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ -2; $\boxed{E}$ 1.

28. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{x-3}$.
Funcţia f admite punctul de maxim:

$\boxed{A}$ $\frac{16}{3}$; $\boxed{B}$ $-\frac{16}{3}$; $\boxed{C}$ $-\frac{3}{16}$; $\boxed{D}$ $\frac{3}{16}$; $\boxed{E}$ $-\frac{2}{3}$.

29. (3p) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases}e^x+a & \text{dacă } x<0\\ x^2+2 & \text{dacă } x\geq 0\end{cases}$.

Pentru $a=1$ aria cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele $x=-3$ şi $x=-2$ este:

$\boxed{A}$ $1+e^{-2}+e^{-3}$; $\boxed{B}$ $1-e^{-2}-e^{-3}$; $\boxed{C}$ $1+2e^{-2}-e^{-3}$;

$\boxed{\text{D}}$ $1 + e^{-2} - e^{-3}$; $\boxed{\text{E}}$ $2 + e^{-2} - e^{-3}$.

30. (3p) Fie funcţia: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

Atunci limita $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ -1; $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{E}}$ $+\infty$.

CAPITOLUL 2

Soluţii şi răspunsuri corecte

Varianta 1

1. $S_{50} = \dfrac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = (2 + 100) \cdot 25 = 2550.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

2. Din $\Delta = 0$, obţinem $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. $|z| = \dfrac{\left|2 + \sqrt{6}i\right|}{\left|2 - \sqrt{6}i\right|} = \dfrac{\sqrt{4+6}}{\sqrt{4+6}} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Ecuaţia se rescrie $\lg(-2x + 23) = \lg(20x)$, cu condiţia $x > 0$. Astfel obţinem soluţia $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. $T_{k+1} = C_8^k x^{8-k} \left(\dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = C_8^k x^{8-k-\frac{k}{3}} 8^k$. Coeficientul lui x^4 se obţine când $4 = 8 - k - \dfrac{k}{3}$, adică pentru $k = 3$. Acest coeficient este $C_8^3 8^3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci $M(-1, 5)$ şi

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ obţinem $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, $\sin x + \cos x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Condiţia ca vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie coliniari este ca $\dfrac{m-1}{m-2}=\dfrac{3}{4}$, de unde rezultă $m=-2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Din teorema sinusurilor avem $\dfrac{a}{\sin A}=2R$, deci $R=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Avem $f\left(f\left(1\right)\right)=f\left(5\right)=17$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. Notăm $t:=2^x>0$. Rezultă ecuaţia $t^2-3t+2=0$, ale cărei soluţii sunt $t_1=1$ şi $t_2=2$. Prin urmare, obţinem două soluţii $x_1=0$ şi $x_2=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. Prin calcul direct obţinem $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x}{x^2-1}=\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. $\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^x+x^2\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\mathrm{e}-\frac{2}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. Avem $f'\left(x\right)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=\left(2x+x^2\right)\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Din tabelul de variaţie a funcţiei f, deducem că $x_1=0$ şi $x_2=-2$ sunt punctele de extrem.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Din $f''\left(x\right)=6x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că singurul punct de inflexiune al graficului funcţiei f este $x=-1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $\displaystyle\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+16}=\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}\Big|_0^4=\frac{\pi}{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Aplicând regula lui l'Hospital, rezultă că limita are valoarea 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-4}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x = \ln|x-2|\Big|_0^1 = -\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Avem $f'(x) = \dfrac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Prin calcul direct rezultă $\det(A) = 2$. Cum $\det(A^n) = [\det(A)]^n$, obţinem ecuaţia $2^n = 256$, de unde $n = 8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Notăm $S := \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}$. Avem $S = \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_3x_4}\right)$. Folosind relaţiile lui Viète, obţinem

$$S = \left(\frac{S_3}{S_4}\right)^2 - 2\frac{S_2}{S_4} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

23. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2\sqrt{x^2+5} = 3x$. De aici rezultă că singura soluţie este $x = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 are panta egală cu $f'(x_0)$. Cum tangenta este paralelă cu axa Ox, avem $f'(x_0) = 0$. Astfel obţinem $x_0 = 0$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. prin urmare, ecuaţia cerută este $y - 1 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

25. Deducem succesiv $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\text{tg } x - 2x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg } x}{x} - 2\right) = -1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

26. Avem $f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X+1)(X^2+X+1)$. Astfel se obţin rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ şi $x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Deci $|x_2| + |x_3| = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $x*y = xy-3x-3y+12 = (x-3)(y-3)+3$, $\forall x, y \in G$. Ecuaţia $x*x*x = 1$ devine $(x-3)^3+3 = 11$, a cărei singură soluţie din G este $x = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^3+2}$. Din tabelul de variaţie a funcţiei f, deducem că pentru orice $x \in [0,\infty)$, $0 \le f(x) < \frac{1}{3}$. Deci $0 \le \displaystyle\int_{2022}^{2023} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}$. Prin urmare, $[I] = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

29. Din inegalităţile $0 < \mathrm{e}^{-t^2} \le 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $0 < \displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \le 1$, $\forall x > 0$. Deci $0 < \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \le \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$. Folosind criteriul cleştelui, obţinem imediat că $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Avem succesiv

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)(x-\ln x)\\
=\;& \lim_{x\to\infty}\frac{2(x-\ln x)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+2x+2}}\\
=\;& \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}\\
=\;& 1.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 2

1. Din condiţiile $2x+1 \geq 0$ şi $x+1 \geq 0$, rezultă $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, obţinem $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $a_{20} = a_1 + 19r$, unde $a_1 = 1$ şi $r = 3$. Deci $a_{20} = 58$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. $|z| = \dfrac{|1-3i|}{|1+3i|} = \dfrac{10}{10} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. $T_{k+1} = C_8^k \left(x^2\right)^{8-k} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_8^k 2^k x^{16-\frac{5k}{2}}$. Din condiţia $16 - \dfrac{5k}{2} = 6$ rezultă $k = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Condiţiile de existenţă a logaritmilor sunt $x^2+9 > 0$, $2x > 0$. Deci căutăm soluţii $x > 0$. Ecuaţia devine $\log_3 \dfrac{x^2+9}{2x} = 1$ sau $\dfrac{x^2+9}{2x} = 3$, cu unica soluţie $x = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. $\operatorname{dist}(A,d) = \dfrac{|1\cdot(-1) + 0\cdot\sqrt{3} + 3|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Deci $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12} = 2\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Mijlocul laturii $[BC]$ este $M\,(1,2)$. Mediana dusă din vârful A are ecuaţia
$\dfrac{x - x_A}{x_M - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_M - y_A}$ sau, echivalent $x - 3y + 5 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. Ecuaţia este echivalentă cu $2\sin x\cos x = \cos x$. Rezultă $\cos x = 0$ sau $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Soluţiile din $[0, 2\pi]$ ale acestor două ecuaţii sunt $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ şi $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $f'(x) = a^x \ln a + 3^x \ln 3 - 2 \cdot 5^x \ln 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci $f'(0) = \ln \dfrac{3a}{25}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Observăm că $f(0) = 0$, deci condiţia din ipoteză se rescrie $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, 0 este punct de minim local pentru funţia f. Conform Teoremei lui Fermat, $f'(0) = 0$. Rezultă $\ln \dfrac{3a}{25} = 0$, de unde obţinem $a = \dfrac{25}{3}$. Aşadar, $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{634}{75}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x + 3^x - 2 \cdot 5^x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1 + \frac{2}{\ln 3} - \frac{8}{\ln 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. $f'(x) = \ln(1 - x) - \dfrac{x}{1 - x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 are ecuaţia $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Pentru $x_0 = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$ obţinem ecuaţia $y = -1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}\left(x - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Integrând prin părţi, obţinem $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(1 - x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$, oricare ar fi $x \in (0, 1)$. Deci $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Din $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obţinem $e = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. Din asociativitate rezultă $a := 1 \circ 2 \circ ... \circ 800 = (1 \circ ... \circ 4) \circ 5 \circ (6 \circ ... \circ 800) = \alpha \circ 5 \circ \beta$, unde $\alpha := 1 \circ ... \circ 4$, $\beta := 6 \circ ... \circ 800$. Cum $x \circ 5 = 5 \circ x = 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obţinem imediat $a = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. Avem $x \circ x \circ x = (x - 5)^3 + 5$. Ecuaţia se rescrie $(x - 5)^3 + 5 = x$ şi are soluţiile $4,\ 5,\ 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Din relaţiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Avem succesiv

$b := \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} = \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_2x_3} + \dfrac{1}{x_1x_3}\right) = \dfrac{S_2^2}{S_3^2} - 2\dfrac{S_1}{S_3}$. Cum $S_2 = -2$, $S_3 = -3$, rezultă $b = \dfrac{16}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Singurul punct critic al funcţiei f este $x = 0$. Cum $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$ şi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \infty)$, obţinem că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, \infty)$, deci are un singur punct de extrem, şi anume minim, $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. $\displaystyle\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 + x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

24. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to -8\\ x>-8}} f(x) = -\infty$, dreapta $x = -8$ este asimptotă verticală (la dreapta) şi $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}} f(x) = \infty$, dreapta $x = 8$ este asimptotă verticală (la stânga).

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{8x+1}{8x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{8x+1}{8x-1}\right)^x$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1 + \dfrac{2}{8x-1}\right)^{\frac{8x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{8x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$, limita cerută este egală cu $\dfrac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. Obţinem $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{8+x}{8-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1 + \frac{16}{8-x}\right)\mathrm{d}x$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

29. Deoarece $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3$, rezultă $a = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Evident, $0 \leq x^t\sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall t > 0$. Deci

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, \ \forall t > 0. \tag{1}$$

Apoi, cum $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, rezultă $x^t\sqrt{1-x^2} \leq x^t$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall t > 0$. Prin urmare, $\int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^t \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{t+1}}{t+1}\right|_0^1 = \frac{1}{t+1}$, $\forall t > 0$. Trecând la limită cu $t \to \infty$, rezultă

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 x^t\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \leq 0. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2), folosind criteriul cleştelui, deducem că limita cerută este egală cu 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 3

1. Dacă $z = x + yi$, ecuaţia devine $2(x + 3y) - 3(x - yi) = 1 + 5i$. Rezultă $x = -1$, $y = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. $S = x_1+x_2 = 2m$, $P = x_1x_2 = m+1$. Relaţia devine $S^2-3P = -3$, de unde $m_1 = 0$, $m_2 = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Ecuaţia este echivalentă cu $\dfrac{1}{2}\log_2 x + \dfrac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = \dfrac{7}{4}$, de unde $\log_2 x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. $T_{k+1} = C_{10}^k 2^{10-k} x^k$. Se obţine $k = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. Prin ridicare la puterea a treia, ecuaţia este echivalentă cu $x = x^3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Notăm $t := 8^x$ şi ecuaţia devine $t - \dfrac{8}{t} = 2$, de unde $t = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. $\sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. $\det(A) \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Cum $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$, obţinem $\det(A) = 2$, de unde rezultă $m_1 = -1$, $m_2 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. Din $A \cdot A^{-1} = I_3$ rezultă $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_3) = 1$. Cum $A^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$, pentru ca $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, trebuie ca $\det(A) = \pm 1$ sau, echivalent, $m^2 - m = \pm 1$, condiţie care nu e satisfăcută de niciun număr $m \in \mathbb{Z}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. $f(-1) = [(1+i)^2]^{1011} + [(1-i)^2]^{1011} = (2i)^{1011} + (-2i)^{1011} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Cum $f(-1) = 0$, restul este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. Fie $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ rădăcină a polinomului f, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Din $f(\alpha) = 0$, obţinem $(\alpha + i)^{2022} = -(\alpha - i)^{2022}$. De aici rezultă $|\alpha + i|^{2022} = |\alpha - i|^{2022}$. Obţinem imediat $a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2$ şi astfel $b = 0$. Prin urmare, polinomul f are numai rădăcini reale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

17. Fie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$. Din tabelul de variaţie, rezultă că imaginea funcţiei g este $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Funcţie impară pe interval simetric faţă de 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. Conform teoremei de medie, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ există $c_x \in [x, x+1]$, astfel încât $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_x)$. Deci, $\forall x \in (0, \infty)$,

$$\frac{\sqrt{25 + x^2}}{x^{2023}} \leq \frac{1}{x^{2023}} \cdot \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\sqrt{25 + (x+1)^2}}{x^{2023}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$, iar panta mediatoarei segmentului $[AB]$ este $m = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$. Ecuaţia mediatoarei este $y - y_M = m(x - x_M)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $\mathscr{A}_{OAB} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Graficul funcţiei f are asimptote orizontale la $-\infty$ şi ∞.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

26. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. Funcţia f are un punct de maxim local în $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

29. $\mathscr{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 x \mathrm{d}x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. $S_{10} = 2\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 4

1. Folosind relaţiile lui Viète, $S = 2m$, $P = m$. Din $S^2 - 3P = 0$, rezultă $4m^2 - 3m = 0$, de unde $m \in \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. Condiţia de existenţă a logaritmilor este $x > 0$. Cu notaţia $t := \log_3 x$, ecuaţia devine $t + \frac{t}{2} - 2t = \frac{3}{2}$, de unde obţinem $t = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. $T_{k+1} = C_{20}^k 3^{\frac{20-k}{5}} 2^{\frac{k}{2}}$, $k \,\vdots\, 2$ şi $k \,\vdots\, 5$, obţinem $k \in \{0, 10, 20\}$, adică 3 termeni.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. $\left[\left(\sqrt{8}+1\right)^2\right] = \left[9 + 2\sqrt{8}\right] = 9 + \left[2\sqrt{8}\right] = 9 + \left[\sqrt{32}\right]$. Cum $\sqrt{32} \in \left[\sqrt{25}, \sqrt{36}\right)$, rezultă că $\left[\left(\sqrt{8}+1\right)^2\right] = 14$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Condiţia este ca ecuaţia să aibă o singură soluţie, adică $\Delta = 0$. Obţinem $a = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Dreapta BC are ecuaţia $x + y - 4 = 0$. Atunci $\text{dist}(A, BC) = \frac{|1 \cdot x_A + 1 \cdot y_A - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. A_5^3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Condiţia de perpendicularitate este $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, de unde deducem $m \in \{-3, 3\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{CB} = 11$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Din condiţia $\Delta < 0$, deducem $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab)$, $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

13. Fie $X(a) \in G$ soluţie a ecuaţiei date. Obţinem $X(2a - 10a^2) = X\left(-\frac{12}{5}\right)$, prin urmare $2a - 10a^2 = -\frac{12}{5}$ şi obţinem două soluţii: $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_2 = -\frac{2}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Dacă $a := \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} * ... * \frac{1}{2022}$, atunci $f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot f\left(\frac{1}{2022}\right) = \frac{1}{2023}$. Deci $\frac{1-a}{1+a} = \frac{1}{2023}$, de unde rezultă $a = \frac{1011}{1012}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Valoarea determinantului matricei pătratice asociate sistemului este -7.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. $\det(A) = 0$, $d_{\text{car}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. Din $f(-1) = 1 - a + b - c + 2 = 31$, rezultă $-a + b - c = 28$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Relaţia se rescrie $S_4 + \frac{S_3}{S_4} = 37$ şi, folosind relaţiile lui Viète, rezultă $c = -70$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)(x^2+5)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. $y = 0$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2 \ln \frac{x^2+5}{x^2+1} &= \lim_{x\to\infty} \ln \left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right)^{x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln \left[\left(1+\frac{4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{4}}\right]^{\frac{4x^2}{x^2+1}} \\ &= 4.\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. $f'(x) = x\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+25}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

23. Din studiul variaţiei funcţiei f, deducem că $\operatorname{Im} f = (0,3]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \dfrac{21}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Cum $x^{n+1} \leq x^n$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem $\dfrac{x^{n+1}}{5x^2+x+1} \leq \dfrac{x^n}{5x^2+x+1}$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, prin integrare pe $[0,1]$, rezultă $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

Avem

$$5I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Din $I_{n+2} \leq I_n$, $I_{n+2} \leq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi (3), rezultă $7I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $I_{n+2} \leq \dfrac{1}{7(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \leq \frac{1}{7(n-1)},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2. \tag{4}$$

Pe de altă parte, din $I_n \geq I_{n+2}$, $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi (3), obţinem $7I_n \geq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sau

$$I_n \geq \frac{1}{7(n+1)}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Aşadar, din (4) şi (5) avem pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\frac{n}{7(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{7(n-1)}. \tag{6}$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ în (6), deducem cu criteriul cleştelui, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+2\right)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{2x} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Avem succesiv

$$\begin{aligned}
\text{Aria} &= \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 5.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

29. Din condiţia $f'(x_0) = 2$ obţinem $x_0 = 1$, deci singurul punct de pe graficul funcţiei f, în care tangenta la grafic are panta 2 este $(1, f(1)) = (1, \ln\frac{4}{\mathrm{e}})$. Ecuaţia tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, deci ecuaţia cerută este $y - \ln\frac{4}{\mathrm{e}} = 2(x-1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln(4x) - \frac{1}{x}\right] \mathrm{d}x = 2\,(\mathrm{e}-1)\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 5

1. Din condiţiile de existenţă, $3x+9 \geq 0$, $x+2 \geq 0$, $x+7 \geq 0$, rezultă $x \geq -2$. Prin ridicare la pătrat în ambii membri ai ecuaţiei, obţinem $x = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. Vârful graficului funcţiei f este $V_f(1,-5)$, iar vârful graficului funcţiei g este $V_g(m^2, m^4+6m)$. Prin urmare $m = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. Folosind relaţiile lui Viète, $x_1 + x_2 = m+2$, $x_1x_2 = m$, obţinem $x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 2m + 4$, $x_1^3 + x_2^3 = (m+2)(m^2+m+4)$. Astfel obţinem soluţia $m = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Inecuaţia se rescrie $\left(\frac{3}{4}\right)^{10-6x-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$. De aici rezultă $x \in (-7,1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Folosind $\log_{x+2} x = \dfrac{1}{\log_x (x+2)}$, deducem soluţia $x = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Fie $z = a + bi$. Atunci ecuaţia devine $\sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 8 + 4i$, de unde rezultă $z = -3 + 4i$. Deci $|z| = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. $T_{k+1} = C_{100}^k \left(\sqrt{2}\right)^{100-k} \left(\sqrt[3]{3}\right)^k$. Din condiţiile $\dfrac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, rezultă $k \,\vdots\, 6$. Obţinem 17 termeni raţionali.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. $z = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$. Deci $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. Elementul neutru este $e = 3$, iar $x' = 2 + \dfrac{1}{x+2} \in \mathbb{Z}$. Prin urmare $x \in \{1, 3\}$ şi suma cerută este 4.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Prin calcul direct obţinem $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. Fie

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^5+3x^4+5x^3+3x^2+6x+4 \\ &= 2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5), \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Atunci

$$f(-1) = -2(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)(1+x_5).$$

Dar $f(-1)=-3$. Deci

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)(1+x_5)=\frac{3}{2}$$

şi numărul cerut este egal cu $\dfrac{2}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Avem $x*x=\sqrt{2\cdot 5^x}=5^{\frac{x+4}{4}}$. De aici obţinem ecuaţia $2\cdot 5^x - 25\cdot 5^{\frac{x}{2}}=0$. Notând $t:=5^{\frac{x}{2}}>0$, rezultă $2t^2-25t=0$, a cărei singură soluţie strict pozitivă este $t=\frac{25}{2}$. Prin urmare, singura soluţie a acuaţiei date este $x=\log_5\frac{625}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. Fie $f:G\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{3-x}{3+x}$. Atunci $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in G$. Fie $a:=\dfrac{3}{2}*\dfrac{3}{3}*\dfrac{3}{4}...*\dfrac{3}{20}$. Avem

$$f(a)=f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{3}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot ...\cdot f\left(\frac{3}{20}\right)=\frac{1}{210}.$$

Deci $\frac{3-a}{3+a}=\frac{1}{210}$, de unde rezultă $a=\frac{627}{211}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Avem succesiv

$$\int_1^{\sqrt[4]{2}} \mathrm{e}^{\alpha x^4+\ln x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\alpha}\int_1^{\sqrt[4]{2}} 4\alpha \mathrm{e}^{\alpha x^4+\ln x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x^4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{4\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha}\right).$$

Condiţia din enunţ devine

$$\frac{1}{4\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha}\right)=\frac{3}{\alpha},$$

de unde obţinem $\alpha=\ln 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. .Prin calcul direct numărul cerut este $\dfrac{1}{n+1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Avem

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^{2022} x+\operatorname{tg}^{2024} x\right) \mathrm{d}x \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)' \,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}^{2022} x\right)(\operatorname{tg} x)' \,\mathrm{d}x \\ = & \left.\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left.\frac{\operatorname{tg}^{2023} x}{2023}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2025}{4046}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} x(\operatorname{ctg} x+\ln x) & =\lim_{x \searrow 0}\left(\frac{x \cos x}{\sin x}+x \ln x\right) \\ & =1+0=1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Prin calcul direct, $f'(x)=\ln x+1$, $\forall x>0$. Obţinem că $x=\mathrm{e}^{-1}$ este singurul punct de extrem local.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. Avem $f'(x)=0$, $\forall x>0$. Prin urmare $f(x)=C$, $\forall x>0$ ($C \in \mathbb{R}$) şi cum $f(1)=\frac{\pi}{2}$, obţinem $f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x>0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 are panta egală, pe de o parte, cu $f'(x_0)$ şi, pe de altă parte, cu m. Rezultă $6x_0^2+4=m$. Însă punctul $(x_0, f(x_0))$ se găseşte pe dreapta de ecuaţie $y=mx+4$. Deci $2x_0^3+4x_0=mx_0+4$. De aici rezultă imediat că $x_0=-1$ şi $m=10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Graficul funcţiei f nu are asimptote verticale şi nici orizontale. Avem $m=\lim\limits_{x \rightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ şi

$$\begin{aligned} n & =\lim_{x \rightarrow \infty}[f(x)-mx]=\lim_{x \rightarrow \infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right) \\ & =\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

Folosind regula lui l'Hospital, obţinem

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Prin urmare, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Similar deducem că $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}}\mathrm{d}x = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x &= \int \frac{\ln x\,(\ln x)'}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Folosind regula lui l'Hospital, deducem

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x' f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \\ &= \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 1 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \pi\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x\left(\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right)'\mathrm{d}x\\
&= \pi\left(\frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\mathrm{d}x\right) = \pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{-2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}\Big|_0^1\right)\\
&= \pi\left(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{-2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-3\right)}{4\mathrm{e}^2}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Avem $\Delta = 4 - 4\sin^2 a \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. Fie d dreapta paralelă prin C la AB. Din $d \parallel AB$, rezultă $m_d = m_{AB}$, deci $m_d = 1$. Ecuaţia dreptei d este $y - y_C = m_d(x - x_C)$. Vom obţine $x - y + 5 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

29. Lungimea înălţimii din A este egală cu distanţa de la punctul $A(x_A, y_A)$ la dreapta BC de ecuaţie $ax + by + c = 0$, adică

$$\operatorname{dist}(A, BC) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cum BC are ecuaţia $x - y + 4 = 0$, obţinem $\operatorname{dist}(A, BC) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. Avem $\sin A = \dfrac{4}{5}$. Din teorema sinusurilor obţinem $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, de unde rezultă $R = \dfrac{25}{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 6

1. Condiţia de existenţă a radicalului de ordin doi este: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Prin ridicare la pătrat obţinem ecuaţia $2x^2 + 2x = 0$, cu soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Ambele sunt în $[-1, 1]$ şi verifică ecuaţia dată.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Progresia geometrică are primul termen egal cu 1 şi raţia 2. Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Folosind relaţiile lui Viète, $S = x_1 + x_2 = -1$, $P = x_1 x_2 = 1$, rezultă că $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2-2P}{P} = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. Există exact 7 submulţimi formate cu numere pare al mulţimii date: $\{0\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este $2^n = 1024$, adică $n = 10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Din $3 = n + 1$ şi $m - 1 = 4$ rezultă că $m = 5$, $n = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. Prin explicitarea modulelor se obţine că

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2x & \text{dacă } x \in [-1, 1) \\ 2 & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Atunci f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iar derivata lui f este $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$, punctele -1 şi 1 fiind puncte unghiulare.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Abscisa punctului de interseţie este soluţia unică a ecuaţiei $3^x + 4^x = 5^x$, adică $x = 2$. Rezultă că $M(2, 2\log_2 5)$ este punctul de interseţie al traiectoriilor şi atunci distanţa de la O la M este $2\sqrt{1+\log_2^2 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Avem $\sin x = \frac{1}{2}$ şi atunci $\cos 2x = 2\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. Aria triunghiului este egală cu $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. Valoarea lui $f(0)$ este -1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Cum restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ trebuie să fie egal cu 0, se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Pentru $a = 3$, polinomul f devine $(X-1)^3$ şi atunci 1 este rădăcină triplă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. Cum $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$, rezultă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. Cum $f_s'(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ şi $f_d'(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$, rezultă că $f_s'(0) + f_d'(0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. Din definiţia unei primitive rezultă că aceasta este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi prin urmare continuă în $x = 0$. Atunci variantele A şi E se exclud şi prin derivarea lui F rămane doar varianta D.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Rangul matricei poate fi 0, pentru $a = 0$, sau 1, pentru $a \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. Pentru $a = 1$, $A^2 = 3A$, $A^3 = 3^2 A$ şi atunci $A^{2023} = 3^{2022} A$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

21. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = -\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Cum $I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$ şi $I_1 - I_2 = 0$, rezulă că $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, rezultă că graficul lui f nu are nici o asimptotă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Derivata funţiei f, $f'(x) = \ln x(\ln x + 2)$, $x \in (0, +\infty)$, are două zerouri, $x_1 = 1$ şi $x_2 = \frac{1}{e^2}$, din care unul este punct de maxim local şi unul este punct de minim local.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Din taboul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are trei puncte de intersecţie distincte dacă şi numai dacă $0 < m < \frac{4}{e^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Determinantul matricii este egal cu -4.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. Soluţia unică a sistemului liniar este $(0, 1, 0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

29. Întrucât $5^2 + 12^2 = 13^2$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A şi atunci $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Vârful parabolei are coordonatele $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$ şi $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 7

1. Cum $z-1=-i$ rezultă că $(z-1)^{2023}=(-i)^{2023}=-i^3=i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. Progresia aritmetică are primul termen egal cu -3 şi raţia 1. Atunci suma primilor 10 termeni este $S_{10}=\frac{(-6+9\cdot 1)\cdot 10}{2}=15$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. După substituţia $2^x=t$, ecuaţia $4^x-2^{x+1}-8=0$ devine $t^2-2t-8=0$, cu rădăcinile $t_1=-2$, $t_2=4$. Rezultă $x=2$ soluţie unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Folosind binomul lui Newton, suma este egală cu $(1+2)^n=3^n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. Panta dreptei $x+y-2=0$ este -1 şi atunci panta dreptei cerute este 1. Rezultă că aceasta are ecuaţia $y-(-1)=1\cdot(x-1)$ sau $x-y-2=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Din $f(0)=0$, $f(-1)=0$ şi $f(1)=2$, rezultă că $a=b=1$, $c=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Din $2x+1=5x-2$ rezultă $x=1$ şi atunci $y=3$, adică $M(1,3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Media geometrică a numerelor este $\sqrt{\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $f'(x)=\frac{x^2+x+1-(x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1=\ln\sqrt{3}+\tfrac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. Avem $\sin 2x+\cos 2x=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\frac{239}{169}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este $R=\frac{BC}{2}=5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. Câtul împărţirii lui f la polinomul $g = X+1$ este $q = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, iar restul $r = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Cum $f = (X+1)(X-1)^2$, rezultă că rădăcinile lui f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$ şi $f(0) = 1$, rezultă că $a = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. Din $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f_s'(0) = 1$ şi $f_d'(0) = 0$, rezultă că suma cerută este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. Determinantul matricei A este $4-2m$ şi atunci $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Pentru $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$ şi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Cum $\lim\limits_{x\pm\infty} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$, rezultă că $y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga către $+\infty$, $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta către $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = 1 - 2\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. Cum $f : (-1, +\infty) \to (-\infty, 1)$ este o funcţie inversabilă şi derivabilă, iar $f(0) = -1$ şi $f'(0) = 2 \neq 0$, rezultă că inversa $f^{-1} : (-\infty, 1) \to (-1, +\infty)$ este derivabilă în punctul -1 şi $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{E}$.

24. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, dar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ rezultă că graficul lui f doar o asimptotă, mai precis $y = x$ asimptotă oblică la ∞. Derivata lui f, $f^{'}(x) = 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, are un singur zerou, $x = 0$, care este unicul punct de extrem (punct de minim global). Deci $m = 1$ şi $n = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{D}$.

25. Din tabloul de variaţie al funcţiei $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ se trage concluzia că funţia f este surjectivă, dar nu este injectivă.

Răspuns corect: $\boxed{B}$.

26. Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are două puncte de intersecţie distincte dacă şi numai dacă $m > 1$.

Răspuns corect: $\boxed{C}$.

27. Condiţia de existenţă a radicalului la numitor: $x^2 - 1 > 0$ implică $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{C}$.

28. Cum $\int\limits_{a+1}^{a+2} f(x)\sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int\limits_{a+1}^{a+2} (x - 1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{a+1}^{a+2} = a + \frac{1}{2}$, rezultă că limita este egală cu $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{E}$

29. Condiţia de ortogonalitate este: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow 3\cdot(-2) + (m+1)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

30. Condiţiile de existenţă $x - x^2 \geq 0$ şi $1 - x \geq 0$ înseamnă că soluţiile sunt în intervalul $[0, 1]$. Prin ridicarea la pătrat a ecuaţiei date, rezultă ecuaţia $2x^2 - 3x + 1 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

Varianta 8

1. Din $f(-1) = m$ rezultă că $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. Modulul lui $z = \left[\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right]^{2023}$ este $\left|\left(\sqrt{7}-1\right) + i\left(\sqrt{7}+1\right)\right|^{2023} = 4^{2023}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. După împărţirea cu 7^x şi folosind substituţia $\left(\frac{5}{7}\right)^x = t$, ecuaţia devine $t^2 + t - 2 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Cum $t > 0$, rezultă că $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ şi $x = 0$ este soluţie unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Termenul de rang $k+1$ al dezvoltării $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^{1000}$ este $T_{k+1} = C_{1000}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$. Cum $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1000-k}{k+1} \cdot \frac{3}{2} \geq 1$, avem că $T_{k+2} \geq T_{k+1} \Leftrightarrow k = 0, 1, \ldots, 599$ şi $T_{k+2} < T_{k+1} \Leftrightarrow k = 600, \ldots, 999$. Rezultă că T_{601} este cel mai mare termen.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Folosind relaţiile lui Viète, avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, de unde rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. Din $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_C + x_{C'}}{2}$ şi $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_C + y_{C'}}{2}$, rezultă că $A'(1, 2)$, $C'(2, 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Cum $A + B = \pi - C$, avem că $\sin C + \cos C = 1$. Prin ridicare la pătrat obţinem $\sin 2C = 0$, adică $2C = \pi$ sau $C = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. Se observă că $z * (-1) = -1$, pentru orice $z \in \mathbf{C}$, 0 este element neutru şi -1 nu este element simetrizabil.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. Se observă că limita la stânga, $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \cos\frac{1}{x}$, nu există, deşi limita la dreapta, $\lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$. Deci nu există limita în 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Se observă că continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar derivata este

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x} & \text{dacă} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. Cum $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x = \int_1^a \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{x}}\Big|_1^a = e^{-\frac{1}{a}} - e^{-1}$, rezultă că limita este $\frac{e-1}{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi atunci $\dfrac{\sin a + \sqrt{3} \cos a}{\sin a - 2\sqrt{3} \cos a} = -\dfrac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Raza cercului înscris în triunghiul ABC este $r = \frac{S}{p} = 1$, unde $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = 24$ este aria triunghiului ABC şi $p = \frac{48}{2} = 24$ este semiperimetrul triunghiului ABC.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Determinantul $\det(A) = 3\omega(\omega - 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Prin calcul, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Prin calcul, $A^4 = 3^2 I_3$, $A^6 = 3^2 A^2$, $A^8 = 3^4 I_3$. Prin metoda inducţiei matematice se poate demonstra că, pentru orice număr natural n, A^{2n} este o matrice cu toate elementele numere reale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Prin calcul avem $f(1) = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Din $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că f este o funcţie strict crecătoare pe intervalul $(0, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ şi f este continuă, avem că imaginea funcţiei este $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Integrala $\displaystyle\int_1^e xf(x)\,\mathrm{d}x$ este egală cu $\displaystyle\int_1^e (x\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{e^2-4e+5}{4}$, dacă se aplică integrarea prin părţi pentru integrala $\displaystyle\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. Determinantul de tip Vandermonde este $(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Avem că $\det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2 = (a_2-a_1)^2(a_3-a_1)^2(a_3-a_2)^2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Cum $\det A = 2 \neq 0$, rezută că sistemul liniar omogen are soluţia unică nulă $(0,0,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. Cum $x^2+x+1>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că domeniul de definiţie este $D=\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f^{'}(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

25. Integrala $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. $I_0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ \mathrm{arctg}\,x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ şi $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\big|_0^1 = \ln\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. $\forall n\geq 2$, avem $I_{n-2}+I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{n-2}+x^n}{x^2+1}\,dx = \int\limits_0^1 x^{n-2}\,dx = \frac{1}{n-1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Cum şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, rezultă că $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29. Din $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = +\infty$, rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$ şi $x = -1$, $x = 0$ asimptote verticale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Cum $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ avem că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de maxim local pentru f. Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are un singur punct de intersecţie dacă şi numai dacă $m = -4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 9

1. Prin ridicare la pătrat obţinem ecuaţia $x^2 - 2x = 0$ cu soluţiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

2. Raţia progresiei geometrice este $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = -2023$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

3. Modului numărului complex z este $|z| = \frac{1+2023^2}{1+(-2023)^2} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Suma este egală cu $(1-2)^n = (-1)^n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Trebuie ca $x > 0$. Ecuaţia este echivalentă cu $x^2 + 1 = 2x$, cu soluţia $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Întrucât $OACB$ este un pătrat, rezultă că simetricul punctului C faţă de dreapta AB este chiar originea reperului, $O(0,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Aria triunghiului dreptunghic ABC este $S = \frac{5\cdot 12}{2} = 30$, iar semiperimetrul său este $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$. Rezultă că raza cercului înscris este $r = \frac{S}{p} = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Condiţia de coliniaritate a vectorilor înseamnă $\frac{-1}{m} = \frac{m}{-1}$, adică $m = \pm 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\sin x(2\cos x - 1) = 0$, cu soluţiile $0, \frac{\pi}{3}, \pi$ în intervalul $[0, \pi]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Derivata lui f este $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f'(0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Cum $f^{'}(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$, avem că funcţia f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Din $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, rezultă că $x = 0$ este punct de minim global. Atunci $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x^3 + x\right)\mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{2}\, e^{x^2}\Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2e-5}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Derivata funcţiei f este $f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x_0 este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Cum $f(0) = -1$ şi $f'(0) = -2$, rezultă că $2x + y + 1 = 0$ este ecuaţia cerută.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Cum $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t-1}{t-1}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{2}{t-1}\mathrm{d}t = x + 2\ln|x-1|$, rezultă că limita este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Se observă ca 0 este element neutru pentru această lege de compoziţie.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

17. Deoarece $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică -1 este un aşa numit element absorbant al legii de compoziţie "$\circ$", rezultă că numărul cerut este egal cu -1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Cum $x \circ y = (x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că $x \circ x \circ x = (x+1)^3 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci ecuaţia dată devine $(x+1)^3 = x + 1$, cu soluţiile -2, -1, 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. Conform relaţiilor lui Viète avem că $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$ şi $S_3 = x_1x_2x_3 = -2$. Atunci rezultă că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = -9$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = -9$ şi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5S_1 - 6 = -20$, rezultă că determinantul $\Delta = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 3 \cdot (-2) - (-20) = 14$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Cum derivata lui f este $f'(x) = x^{n-1}(n+x)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că există două puncte critice $x_1 = -n$ şi $x_2 = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Pentru $n = 2$, derivata lui f este $f'(x) = x(x+2)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci f este strict descrescătoare pe intervalul $(-2, 0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^n}\mathrm{d}x$ este egală cu $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. Deoarece f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cu derivata egala cu zero pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar f este continuă în 0, atunci putem deduce că f este derivabilă în 0, cu derivata egală tot cu 0 (a se vedea corolarul teoremei lui Lagrange). Deci $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Cum $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcţia f este constantă pe $\mathbb{R}$, mai precis $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^n}\mathrm{d}x$ este egală cu $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Determinantul matricii A, $\det A = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Inversa matricii A, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

unde A^* este adjuncta matricii A.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

29. Matricea sistemului are determinantul egal cu 2, soluţia unică este $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Se observă că dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $\pm\infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta către $+\infty$, iar $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Cum $f^{'}(x) = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi studiind semnul derivatei, rezulă că $x = 1$ este punct de minim local pentru f, cu valoarea

$f(1) = e$. Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are cel mult un punct de intersecţie dacă şi numai dacă $m \leq e$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 10

1. Din condiţiile de existenţă a radicalilor avem $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$. Prin ridicare la pătrat avem că $1 = -1$. Absurd! Deci ecuaţia nu are soluţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Al nouălea termen al progresiei geometrice este $b_9 = b_1 q^9 = 2^8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. Modulul lui z este egal cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Suma $S = (1+3)^n = 4^n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. Din condiţiile de existenţă a logaritmilor avem $x \in (0, +\infty)$. Ecuaţia este echivalentă cu $(x-1)^2 = 0$, cu soluţia $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Simetricul punctului C faţă de dreapta AB este chiar originea reperului, $O(0,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este $R = \frac{BC}{2} = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. Vectorii sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este egal cu 0, adică $m = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. Ecuaţia dată este echivalentă cu $\sin x(2\cos x - 1) = 0$, cu soluţiile $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ în intervalul $[0, 2\pi]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Cum derivata este $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$, avem că $f'(0) = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. Observând că avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$, prin aplicarea regulii lui L'Hôspital de două ori, obţinem că limita este egală cu $\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x_0 este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Cum $f(0) = 0$ şi $f'(0) = - - 1$, rezultă că $y = -x$ este ecuaţia cerută.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Integrala este egală cu $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-1}{x-1}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = 1 + \ln 2.$
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Întrucât $x_1 + x_2 = -m$ şi $x_1 x_2 = -2 < 0$, rezultă că rădăcinile ecuaţiei au semne contrare, adică $x_1 < 0 < x_2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. Cum $\displaystyle\int_0^a \left(e^x - e^{-x}\right)\mathrm{d}x = e^a + e^{-a} - 2$, rezultă că limita este egală cu $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Elementul neutru al legii de compoziţie "$*$" este 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. Cum $x * y = xy + (|x| - 1)(|y| - 1)$, rezultă că ecuaţia $x * x = x^2$ este echivalentă cu $(|x| - 1)^2 = 0$, adică $x = \pm 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Suma $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Derivata funcţiei f este $f'(x) = x^{n-1}(x-n)e^{-x}$ cu zerourile $x_1 = 0$, $x_2 = n$, pentru orice $n \in$, $n \geq 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^n}\mathrm{d}x$ este egală cu $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{e-1}{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Inversa matricii A, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,
unde A^* este adjuncta matricii A.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. Soluţia unică este $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cu derivata egala cu zero pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cum f este continuă în 0, atunci putem deduce că f este derivabilă în 0, cu derivata egală tot cu 0 (conform unui corolar al teoremei lui Lagrange). Deci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Cum $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ rezultă că funcţia f este constantă pe $\mathbb{R}$, mai precis $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci integrala este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Se observă că dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $\pm\infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta către $+\infty$, iar $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Cum $f^{'}(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi studiind semnul derivatei, rezulă că $x = 1$ este punct de minim local pentru f, cu valoarea $f(1) = e$. Din tabloul de variaţie al funcţiei f şi din graficul lui f se deduce că intersecţia dintre graficul lui f şi dreapta orizontală $y = m$ are două puncte de intersecţie dacă şi numai dacă $m > e$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. Conform relaţiilor lui Viète avem că $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$ şi $S_3 = x_1x_2x_3 = -2$. Atunci avem $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = S_1^2-2S_2 = -9$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = x_1^2+x_2^2+x_3^2-5S_1-6 = -20$ şi $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2S_1 = 33$. Rezultă că determinantul $\Delta = x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-(x_1^4+x_2^4+x_3^4) = -2-33 = -35$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. Determinantul este de tip Vandermonde şi este egal cu $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = (2 - 1)(4 - 1)(4 - 2) = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. Cum funcţia de sub integrală este impară, rezultă că integrala este egală cu 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $\pm\infty$, iar dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta către $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Întrucât limita $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x+b^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x-2}{2x}\right)} = e^{\frac{1}{2}\ln(ab)} = \sqrt{ab}$ (a se vedea $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$), rezultă că produsul ab este egal cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 11

1. Prin calcul obţinem $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \log_2 4 = 2$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Rescriem expresia astfel: $\left((1+i)^2\right)^{1011} + \left((1-i)^2\right)^{1011} = (2i)^{1011} + (-2i)^{1011} = 0$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. Termenul general are forma: $T_{k+1} = C_n^k 3^{\frac{100-k}{2}} 2^{\frac{k}{3}}, k = 0, 1 \ldots, 100 \Rightarrow 100-k$ trebuie să fie par şi k să se dividă cu $3 \Rightarrow 6 \mid k$, adică 17 termeni. Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. Se pun condiţiile $\Delta > 0$ şi $p = x_1x_2 < 0 \Rightarrow m \in (0, 2)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. Numerele satisfac $(x^2+3x) = \sqrt{2 \cdot 8}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Vectorii sunt coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{-3}{-1} = \dfrac{a-2}{4}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Se foloseşte relaţia $\cos(180° - x) = -\cos x \Rightarrow S = 0$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. Partea stângă a egalităţii este o progresie aritmetică cu $a_1 = 2, r = 3 \Rightarrow 155 = n\dfrac{a_1+a_n}{2}$, unde $a_n = a_1+(n-1)r \Rightarrow$ rezolvând ecuaţia rezultă că $n = 10$. Deci $x = a_{10} = 29$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. $A = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 2x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3x$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Se pun condiţiile $x-1 \geq 0$ şi $5-2x \geq 0 \Rightarrow x \in [1, 5/2] = \mathrm{I}$. Apoi prin ridicare la pătrat se obţine soluţia convenabilă $x = 2 \in \mathrm{I}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. $m_1 = \dfrac{3}{2}, m_2 = -\dfrac{2}{3}$. Deoarece $m_1m_2 = -1 \Rightarrow$ drepte perpendiculare.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. $1-i$ rădăcină $\Rightarrow f(1-i) = 0 \Rightarrow a = -4, b = 6$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. $1-\sqrt{2}$ rădăcină $\Rightarrow f(1+\sqrt{2})=0 \Rightarrow a=-7, b=-3$. Dar şi $1+\sqrt{2}$ e rădăcină $\Rightarrow f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x+3)$. Deci a treia rădăcină este $x=-3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. Se pun condiţiile $f(x)=f'(x)=f''(x)=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{1}{27}$ ambele din $\mathbb{Q}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. Dacă $u \in (0,\infty)$ este elementul neutru atunci $x*u=x, \forall\, x \in (0,\infty) \Rightarrow 2\ln u=1 \Rightarrow u=\sqrt{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Fie x_1 simetricul lui x. Acesta satisface $x^{2\ln x_1}=\sqrt{e} \Rightarrow x_1 = e^{\frac{1}{4\ln x}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Se observă că $e_2=e*e=e^2, e_3=e*e_2=e^{2^2}$, etc. Prin inducţie se arată că $e_n=e^{2^{n-1}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. $f'(x)=2(e^x+x)>0$ pe $[0,1]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. Deoarece funcţia continuă f este strict crescătoare pe $[0,1]$ şi satisface $f(0)<0, f(1)>0 \Rightarrow$ rădăcină unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Prin inducţie se obţine $f^{(n)}(x)=2^n e^{2x}, n\geq 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Se rezolvă ecuaţia $f'(x)=5(x^4-1)=0 \Rightarrow$ punctele critice ± 1, care sunt puncte de extrem.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. $f''(x)=20x^3<0$ pe $(-\infty,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ care se observă că este punct de inflexiune.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. $x=1$ este punct de minim $\Rightarrow f(x)\geq f(1)=-4$ pe mulţimea $(0,\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. $f'(x)\geq 0, \forall\, x\in\mathbb{R}, f(0)=0 \Rightarrow f(x)\geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

26. $A = \int_0^1 (x - \operatorname{arctg} x)dx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{B}$.

27. f este injectivă şi continuă pe $\mathbb{R}$. Deoarece $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ este surjectivă.

Răspuns corect: $\boxed{C}$.

28. Se face schimbarea de variabilă $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t)$. Rezultă $dx = f'(t)dt$.

Deci $\int_0^{1-\pi/4} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(t)dt.$

Răspuns corect: $\boxed{D}$

29. Deoarece $|\arcsin(\sin x)| \leq \frac{\pi}{2}$ rezultă că limita este 0.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

30. Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ şi aplicăm regula lui l'Hospital.

Răspuns corect: $\boxed{E}$.

Varianta 12

1. Prin calcul, ţinând cont că $n! = n(n-1)!, (n+1)! = (n+1)n(n-1)!$ obţinem $n^2 + 2n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Se impune condiţia de existentă a logaritmului $x^2 - 8 > 0$. Inecuaţia este echivalentă cu $x^2 - 8 \leq 1$. Rezolvând cele doua inecuaţii se obţine în final $x \in [-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Se foloseşte formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, cu $n = 2023, k = 2021$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Deoarece $\log_2 8 = 3$ rezultatul este 2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. Folosim relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 = m^2 + 3, x_1 x_2 = 3 \Rightarrow m = \pm 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Rezultă din teorema sinusurilor $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. Condiţia este echivalentă cu faptul că ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ nu are soluţii reale, adică $\Delta < 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $r = a_2 - a_1 = -1 \Rightarrow a_7 = a_1 + 6r = 0$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$ pentru $x > 3$ inecuaţia devine $\dfrac{1}{x-2} \geq 2$, iar pentru $x < 3$ inecuaţia devine $\dfrac{1}{2-x} \geq 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Deoarece $d(A,B) = \sqrt{5}, d(A,C) = \sqrt{20}, d(B,C) = \sqrt{25} \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic. Deci punctul căutat este mijlocul lui BC.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{9}{25}$. Deoarece $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow$ $\cos x = \dfrac{3}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $\cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{AB^2}{BC^2} + \dfrac{AC^2}{BC^2} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Ecuaţia este echivalentă cu $(x-3)^2 = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. Deoarece $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \circ 3 = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Apoi observăm că în expresie apare termenul $\sqrt{9} = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

15. Rezultă imediat din condiţia $P(0) = P(1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Folosind relaţiile lui Viète avem: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_2x_3+x_3x_4 = m$. Dar $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. Se foloseste inducţia matematică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. Se foloseste exerciţiul anterior pentru a arata că

$$B^n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} n\cos(\frac{\pi}{4}) & n\sin(\frac{\pi}{4}) \\ -n\sin(\frac{\pi}{4}) & n\cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Rezultă că limita elementelor este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Integrala se reduce la $\displaystyle\int_1^e x dx = \frac{e^2-1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Se observă că $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx$ şi se aplică integrarea prin părţi.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Prin calcul se obţine $I_n = \dfrac{2n+1}{2}, I_{n+1} = \dfrac{2n+3}{2} \Rightarrow I_{n+1} - I_n = 1 = \text{constantă}, I_1 = \dfrac{3}{2}$. Deci raţia este 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Rezultă din problema precedentă că limita este ∞.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $\displaystyle\int_1^e h'(x)dx = h(e) - h(1).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Fie $H(x)$ o primitivă a lui $h(x)$. Deoarece $H'(x) = h(x) > 0, \forall\, x \geq 1 \Rightarrow$ orice primitivă e crescătoare pe $[1, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Aria este $A = \displaystyle\int_a^{e^2} f(x)dx = (\ln|1+\ln x|)\Big|_a^{e^2} = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \ln a = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Prin calcul direct se obţine $\varphi'(x) = \dfrac{6x^3}{x+1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ punct critic. Se arată că acesta este punct de minim. Valoarea minimă a lui φ este $\varphi(0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Din faptul că $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{|x|} = 0$. Deci limita cerută este egală cu zero.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

29. Se observă că limita este $+\infty$ dacă $a < 1$ şi este $-\infty$ dacă $a > 1 \Rightarrow$ singura variantă pentru care limita este $-\dfrac{1}{2}$ este când $a = 1$. Cu a astfel determinat se calculează limita cerută şi se obţine că este egală cu $-\dfrac{b}{2}$. Deci $b = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. $L = \displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = -1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 13

1. $|z| = |\bar{z}| = 1 \Rightarrow |z| + |\bar{z}| = 2$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Ecuaţia este echivalentă cu $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \Leftrightarrow x = -8$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Ecuaţia lui BC este: $2x+3y-13 = 0 \Rightarrow d(A, BC) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 13|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. Din relaţia $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow r = 3$. Deci $a_{2023} = 1 + 2022 \cdot 3 = 6067$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Numărul de puncte de intersecţie este dat de numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^2 + 3x = -x - 4$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Raza este dată de $R = \frac{abc}{4S}$, unde $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Rezultă $S = 6\sqrt{6}$ şi $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Deoarece $0,04 = 25^{-1} \Rightarrow x + 2023 = -1 \Rightarrow x = -2024$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Se pun condiţiile $\Delta > 0, p = x_1x_2 < 0$ din care rezultă că $m \in (0, 2)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||u|| \cdot ||v||} \Rightarrow a = 16 + 10\sqrt{3}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. $\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \cos 10°$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. Se înmulţeşte egalitatea $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ cu $\omega - 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$. În final, după calcule obţinem că valoarea determinantului este 0.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Valoarea lui m rezultă din condiţia $P(1) = 0$. Deci $m = 2$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Deoarece $m = 2 \Rightarrow P(x) = x^3 - 4x + 3$. Scriem pe $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - x_1x_2x_3$. Folosind relaţiile lui Viète $\Rightarrow (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Este necesar ca $P(-1) = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Se observă că $A = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}$. Prin calcul direct obţinem $A = 3pA$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. $\det(A - I_3) = 3p - 1, \det(A + I_3) = 3p + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Se procedează prin inducţie. $A = (3p)^{1-1}A$. Presupunem relaţia $A^n = (3p)^{n-1}A$ adevărată $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^{n-1}A^2$. Folosind excerciţiul precedent $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^nA$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. Deoarece

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

rezultă că f este continuă pe toată axa reală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $y = 0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$. Pentru a nu mai avea alte asimptote trebuie ca $D = \mathbb{R}$, adică numitorul să nu se anuleze (în caz contrar ar exista asimptotă verticală) $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a \in (-2, 2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. $A = \displaystyle\int_a^2 f(x)dx = (x^3+x^2-x)\Big|_a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 1$. Având în vedere ipoteza se alege $a = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. $x^n \geq x^{n+1}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow I_n \geq I_{n+1}$. Se observă că $\dfrac{1}{n-1} = I_n + I_{n-2} \geq 2I_n \Rightarrow I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Procedând ca la exerciţiul anterior obţinem $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow I_n \geq \dfrac{1}{2(n+1)}$. Deci I_n satisface $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. Prin calcul direct obţinem $f'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-4}{x^2-4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală (la $+\infty$). La fel, deoarece $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty \Rightarrow x = 2$ este asimptotă verticală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Limita se poate rescrie $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\frac{x+2}{x-2}}{\frac{1}{x}}$. Suntem în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ şi aplicăm regula lui l'Hospital. Se obţine $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

29. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală (spre $\pm\infty$). De asemenea $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to k^-} f(x) = -\infty$. Rezultă că dreptele $x = 1$, $x = 2, \ldots, x = n$ sunt asimptote verticale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. Deoarece $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, etc., observăm că f are câte o rădăcină pe fiecare interval $(1,2)$, $(2,3)$, $\dots$, $(n-1,n)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 14

1. Se pune condiţia $2-x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$. Ecuaţia este echivalentă cu $\sqrt{2-x} = 2-x$. Prin ridicare la pătrat obţinem soluţiile $x = 1, 2 \in (-\infty, 2]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Se pun condiţiile $x+2 > 0, x-5 > 0 \Rightarrow x \in (5, \infty)$. Ecuaţia este echivalentă cu $\dfrac{x+2}{x-5} = 8 \Rightarrow x = 6 \in (5, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Dreptele sunt paralele dacă $\dfrac{2}{a} = -\dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Deoarece $\sin(130°) = \sin(180° - 50°) = \sin(50°) \Rightarrow \sin^2(130°) + \cos^2(50°) = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Din teorema sinusurilor avem $R = \dfrac{AB}{2\sin C} = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Numerele $(x > 0)$ satisfac relaţia $\dfrac{\lg\sqrt{x} + \lg x}{2} = \dfrac{3}{2}, \Rightarrow x = 100$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Ecuaţia se rescrie $3^{x-2} = 3^{-\sqrt{x}}, x \geq 0 \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{x}$. Se impune condiţia $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2]$. Ridicând la pătrat obţinem soluţia $x = 1 \in [0, 2]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. Se observă că este o ecuaţie de grad 2. Deoarece $\Delta = 0 \Rightarrow$ pentru orice număr real a ecuaţia admite soluţii reale egale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. $C_n^2 = 28, \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 28, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow n_1 = 8, n_2 = -7 \notin \mathbb{N}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. Se pune condiţia $\Delta \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. $a_{100} = 2C_n^0 = 2, a_{99} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

12. Din teorema împărţirii cu rest $\Rightarrow f = (X^2-1)g + aX + b, a, b \in \mathbb{C}$. Deoarece $f(1) = f(-1) = -2^{51} \Rightarrow a = 0, b = -2^{51}$.

Răspuns corect: $\boxed{D}$.

13. $f(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{X+i}{X-i}\right)^{100} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Notăm $t = \dfrac{X+i}{X-i} \Rightarrow t^{100} = -1$, care are soluţiile $t_k = \cos\dfrac{\pi(1+2k)}{100} + i\sin\dfrac{\pi(1+2k)}{100}, k = 0, 1, \ldots, 99 \Rightarrow (X+i) = (X-i)\cos\dfrac{\pi(1+2k)}{100} + i\sin\dfrac{\pi(1+2k)}{100} \Rightarrow$ rădăcinile $x_k = \cot\dfrac{\pi(1+2k)}{100}, k = 0, 1, \ldots, 99$, care sunt toate reale.

Răspuns corect: $\boxed{C}$.

14. Prin calcul obţinem că $\Delta = (a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$.

Răspuns corect: $\boxed{E}$.

15. Dacă $\Delta \neq 0$ atunci folosind regula lui Cramer obţinem soluţia $x = 1, y = z = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{D}$.

16. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ şi $x^2+y^2+xy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Deci $x+y+z = 1$ de unde rezultă soluţia unică $x = y = 0, z = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{A}$.

17. Din $f(0) = f(1) \Rightarrow a + b = 1$. Deoarece $x_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină avem că şi $x_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină a lui f şi $(X-x_1)(X-x_2) = X^2 - X + 1 = f_1$. Efectuând împărţirea polinomului f la f_1 obţinem restul $(b-1)X + c - a$, care egalat cu zero oferă relaţiile $b - 1 = 0, c - a = 0 \Rightarrow a = c = -2, b = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{B}$.

18. Pentru ca dreapta de ecuaţie $x = 2$ să fie asimptotă verticală se impune condiţia $2^2 - 6\cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = 8$. Pentru ca graficul lui f să fie tangent la axa Ox în $x = 1$ se impune ca $x^2 + ax + 1 = (x-1)^2$ (pentru ca $x = 1$ să fie rădăcină dublă). Rezultă prin identificare $a = -2, b = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{E}$.

19. $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{5}{2}}^{3} f(x)dx = \frac{5}{2} + \frac{9}{2}\ln\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Deoarece $f'(1) = \dfrac{2a+3}{3\sqrt[3]{(a-3)^2}} \Rightarrow a = 3.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Ecuaţia dată este echivalentă cu $2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{(x+1)^3}{3(x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\int_2^5 (x+1)dx = \frac{9}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. $f(x) \geq 0$ pe $[0,1] \Rightarrow A_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Se calculează folosind integrarea prin părţi.

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 x(x-1)^n dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 x\big((x-1)^{n+1}\big)' dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. $\displaystyle\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx = (-1)^n \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{n} - 1\right)^{n+1}\Bigg|_0^1 \Rightarrow$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 1\right)^n + 1\right] = 1 - e.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. $L = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1 - b}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$ gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului $\Leftrightarrow a = 1, b = -1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Pentru $0 \leq x < 2023 \Rightarrow \dfrac{2023^n}{2023^n + x^n} = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{2023}\right)^n} \to 1$. Pentru $x = 2023 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$ iar pentru $x > 2023 \Rightarrow f(x) = 0$. Deci f este discontinuă în punctul $x = 2023$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. Se pune condiţia $1 + \dfrac{2023}{x} > 0 \Rightarrow D = (-\infty, -2023) \cup (0, \infty).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

29. Se obţine prin calcul direct că $f'(x) = -\dfrac{2023}{x^2 + 2023x}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 15

1. Ecuaţia este echivalentă cu $\dfrac{n(n-1)}{2} = n + 2$ care are soluţiile $n_1 = 4 \in \mathbb{N}$ şi $n_2 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ = \cos 80^\circ - \cos 80^\circ = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Numerele sumei sunt în progresie aritmetică cu $a_1 = 1, r = 10$. Din relaţia $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 111 = 1 + (n-1)r$, de unde obţinem $n = 12$, adică $111 = a_{12} \Rightarrow S = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = 672$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. Se impune condiţia $169 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-13, 13]$. Prin ridicarea la pătrat a ecuaţiei $\Rightarrow 169 - x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 5 \in [-13, 13]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. $\log_2 4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8} = 2 + 2 - 2 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Ecuaţia dreptei care trece prin puncul de coordonate $A(x_A, y_A)$ având panta m este: $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y = x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. Parabola este deasupra axei Ox dacă $\Delta < 0$. Se observă că $\Delta < 0\ \forall\, m \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Din $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m(\measuredangle B) = 30^\circ$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Din relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 = 2m + 1, x_1 x_2 = 3m \Rightarrow m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Se observă că $3^{x+1} = \dfrac{3^x - 1 + 5 \cdot 3^x + 1}{2}$ se verifică $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Condiţiile $f(1) = 4, f(-2) = -5, f(-1) = 0$ conduc la un sistem în necunoscutele m, n şi p. Rezultă că $m = n = p = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Se observă că $x = 1$ este rădăcină dublă $\Rightarrow f(1) = 0, f'(1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Deoarece $f = (X^2 - 2X + 1)(3X^2 + 2X + 1) \Rightarrow x_1 = x_2 = 1, x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. Fie $x_1 = x_2 = p$ şi $x_3 = x_4 = q$ cele două soluţii raţionale. Din relaţiile lui Viète rezultă sistemele $p + q = 8, pq = 15$ sau $p + q = 8, pq = -15$. Ţinând cont că $p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 = x_2 = 5, x_3 = x_4 = 3 \Rightarrow a = 94, b = -240$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Din $x * y = y * x, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 2a$. Din $(x * y) * z = z * (y * x), \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (2a - 4a^2)(z - x) = 0$, cu soluţiile $a = 0$ sau $a = \dfrac{1}{2}$ respectiv $b = 0$ sau $b = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Deoarece $A(n) = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(3))^3 = \begin{pmatrix} 27 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se demonstrează prin inducţie că $(A(1))^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. Se obţine prin calcul direct $f'(x) = \dfrac{e^{ax}(ax^2 - 2x + a^3)}{(x^2 + a^2)^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Evident că x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 - 2x + a^3 = 0$. Utilizând relaţiile lui Viète limita devine:

$$L = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right)^{\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \to 0} \left(1 + \frac{2a^2}{1 - a^2} \right)^{\frac{1}{a^2}} = e^2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. Avem de calculat $G = \displaystyle\int e^{ax} \sin x dx = \int e^{ax}(-\cos x)' dx$. Se aplică în continuare formula de integrare prin părţi şi se obţine primitiva $G = \dfrac{e^{ax}(\sin x + \cos x)}{1 + a^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

21. Folosind ipoteza dată avem

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(a(\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) + b(\sqrt{n+b} - \sqrt{n}) + c(\sqrt{n+c} - \sqrt{n})\right) = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Funcţia se rescrie:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2023}{x^2 + 2021}, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases}$$

care este continuă pe $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Se calculează mai întâi $f'(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f'(0) = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = f'(0) = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Aria cerută este $A = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = 2e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(e-1).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. Condiţia de derivabilitate în $x = 0$ implică şi continuitatea în $x = 0 \Rightarrow b = -2, c = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Se integrează prin părţi $I_n = \displaystyle\int_0^n x^2 e^{-x} dx = -\int_0^n x^2 (e^{-x})' dx = -n^2 e^{-n} + \int_0^n 2x e^{-x} dx = \ldots$ Se obţine în final $I_n = 2 - \dfrac{n^2 + 2n + 2}{e^n}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 2}{e^n} = 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

29. Se observă că $f \geq 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$ şi că graficul funcţiei intersectează axa Ox în $O(0,0)$. Deci $S(a) = \displaystyle\int_a^0 f(x) dx = \int_a^0 (e^x - e^{4x}) dx = \dfrac{e^{4a} - 4e^a + 3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

30. $\lim\limits_{a\to-\infty} S(a) = \lim\limits_{a\to-\infty} \dfrac{e^{4a} - 4e^{a} + 3}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 16

1. Fiecărei submulţimi cu 4 elemente a mulţimii A care conţine elementul 0 îi corespunde o submulţime cu 3 elemente a mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Prin urmare numărul acestor submulţimi este C_6^3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. Din proprietăţile puterilor şi ale logaritmilor, $\log_9 \sqrt[3]{3} = \dfrac{1}{3} \log_9 9$, iar $\log_8 \sqrt{2} = \dfrac{1}{3} \log_8 8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. $(1-i)^2 = -2i$, deci $(1-i)^4 = (2i)^2 = -4$, iar $(1-i)^{16} = (-4)^4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. Din condiţia de perpendicularitate a vectorilor deducem $4(m-1)(m+1) - 4 = 0$ şi rezolvăm această ecuaţie de gradul al doilea ţinând cont de faptul că $m < 0$..

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Valoarea maximă a funcţiei noastre de gradul al doilea este $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{13}{-12}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Folosim formula unghiului dublu: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. Se face diferenţa a doi termeni consecutivi: $a_2 - a_1 = -4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Formula sumei primilor termeni ai unei progresii aritmetice este $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Deducem $-221 = \dfrac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \dfrac{(14 - 4(n-1))n}{2}$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea care se formează pentru a găsi numărul termenilor $n \in \mathbb{N}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. Folosind formula sumei primilor termeni ai unei progresii aritmetice deducem $n = 13$, de unde $-x = a_1 + (n-1)r = 7 - 48$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. $AB = 6$, dar, folosind formula distanţei dintre două puncte, $AB = \sqrt{(3+m)^2 + (m-3)^2}$. Rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea care se formează.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. Se determină mijlocul lui (AC) ca fiind $M(1, -1/2)$, apoi se scrie ecuaţia dreptei care trece prin două puncte pentru a găsi ecuaţia lui BM.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. Proprietăţile logaritmilor conduc la rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea $x^2 - x - 2 = 4$, sub condiţia de existenţă $x \geq 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{x^2-25} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. Dat fiind că $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$ şi $\sin \dfrac{1}{x} \in [-1, 1]$, folosim "Criteriul cleştelui".

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Pentru ca rangul lui A să fie 3, trebuie ca determinantul lui A să fie 0. Deoarece A este o matrice superior triunghiulară, determinantul său este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

16. Calcul direct, folosind substituţia inversă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. Descompunerea ecuaţiei $x^3 - x - a = 0$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 este $x^3 - x - a = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, prin urmare $(-a - x_1)(-a - x_2)(-a - x_3) = (-a)^3 + a - a$, deci $-(x_1 + a)(x_2 + a)(x_3 + a) = (-a)^3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

18. Cum ecuaţia $x^3 - x - a = 0$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, avem

$$\begin{cases} x_1^3 - x_1 - a = 0, \\ x_2^3 - x_2 - a = 0, \\ x_3^3 - x_3 - a = 0. \end{cases}$$

Prin urmare,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3) + 3a.$$

Din relaţiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi înlocuim în relaţia anterioară.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. Dacă $a = 0$, obţinem că $x(x^2 - 1) = 0$, deci $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Dacă $a \neq 0$, folosind relaţiile lui Viète ştim că $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1, \\ x_1x_2x_3 = a \neq 0. \end{cases}$
Utilizând primele două relaţii ale lui Viète ajungem la ecuaţia de gradul al doilea

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

care trebuie să admită soluţii întregi. Rezolvând această ecuaţie în necunoscuta x_1 (fără a pierde din generalitate) şi punând condiţia ca $\Delta \geq 0$, ajungem la $x_2^2 \leq 4/3$, unde $x_2 \in \mathbb{Z}$. De aici rezultă că $x_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1x_2x_3 = 0 = a \neq 0$, ceea ce e imposibil. Deci singura posibilitate care rămâne este $x_2^2 = 1$. Înlocuind aceasta în (7), ajungem la $x_1(x_1 + x_2) = 0$. Dacă $x_1 = 0$, atunci $x_1x_2x_3 = 0 = a \neq 0$, ceea ce e imposibil. Dacă $x_1 + x_2 = 0$, din prima relaţie a lui Viète deducem $x_3 = 0$, şi din nou ajungem la $x_1x_2x_3 = 0 = a \neq 0$. În concluzie, $a = 0$ este singura valoare pentru care ecuaţia admite soluţii întregi.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. $f'(x) = 3 + 2\sin x$. Deoarece $\sin x \in [-1, 1]$, deducem că $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. Pentru a determina a, b şi c rezolvăm $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x > 2$, ceea ce conduce la rezolvarea sistemului: $\begin{cases} a + 2b = 0, \\ c - 4b = 1 \\ a - 2c = 0. \end{cases}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Orice primitivă F a lui f satisface $F'(x) = f(x) > 0$ oricare ar fi $x > 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Folosim descompunerea în fracţii simple pentru a rezolva integrala sau ne bazăm pe exerciţiul 23 şi pe faptul că dacă F este o primitivă a lui f atunci $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx = F(x)\Big|_3^4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

26. Calcul direct.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Facem schimbarea de variabilă $x + 1 = t$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Se scoate 11^x factor comun forţat.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29. Funcţia de sub integrală este impară, iar capetele integralei sunt ± 3.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Pentru calculul integralei ne bazăm pe observaţia că

$$\sin^3 x = -(\cos x)'(1 - \cos^2 x).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 17

1. Se aduce la acelaşi numitor prin amplificare cu conjugata şi se ridică fracţia obţinută la pătrat.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{2}$ şi $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-1}{4}$, prin urmare vârful $V(x_V; y_V) \in CIII$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Fiecărei submulţimi cu 3 elemente a mulţimii A care conţine un număr de 2 cifre este îi corespunde o submulţime cu 2 elemente a mulţimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Prin urmare numărul acestor submulţimi este C_5^2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. Ecuaţia se aranjează sub forma $x^2 - 2x + 10 = 0$. Avem $\Delta = -36$, deci $x_{1,2} = \dfrac{\{2 \pm 6i\}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. $(1+i)^2 = 2i$, deci $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, iar $(1+i)^{12} = (-4)^3 = -2^6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Aducem radicalii la acelaşi ordin.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Notăm $5^x = y$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea $y^2 - 6y + 5 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. Cele trei linii ale determinantului sunt proporţionale: $l_2 = 2l_1$, $l_3 = 3l_1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Se calculează A^2 şi se observă că $A^2 = 6A$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Se observă că $x * y = (x-5)(y-5) + 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Deoarece 5 este element neutru pentru „T”, iar 0 este element neutru pentru „$+$”, avem $f(5) = 0$. Deoarece 6 este element neutru pentru „$*$”, iar 1 este element neutru pentru „$\cdot$”, avem $f(6) = 1$. Se rezolvă sistemul format de aceste două relaţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

13. Deoarece $f(x) = x - 5$ este funcţie bijectivă şi izomorfism, $f(x * x * \cdots * x) = f(3^{2024} + 5)$, de unde deducem $(f(x))^{2024} = 3^{2024}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. Din condiţia de perpendicularitate a vectorilor deducem $4(m + 2) - m^2 = 0$ şi rezolvăm această ecuaţie de gradul al doilea.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

15. d': $y - y_A = m'(x - x_A)$, unde m' reprezintă panta dreptei d'. Panta dreptei d este $m = \dfrac{5}{3}$. Din condiţia de perpendicularitate deducem c ă $m' = -\dfrac{3}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Formula fundamentală a trigonometriei, $\sin^2 \alpha + \cos^{\alpha} = 1$, conduce la $\sin \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{21}{25}}$. Cum $\alpha \in C\,III$, $\sin \alpha < 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. Folosim formula $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Ecuaţia asimptotei oblice la $-\infty$ este dată de formula $y = mx+n$, unde $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, iar $n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. Se realizează tabelul funcţiei şi al derivatei şi se deduce că valoarea maximă a funcţiei este -1 (se atinge în $x = 0$).

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Se foloseţe formula $(h \cdot g)' = h' \cdot g + h \cdot g'$ şi faptul că derivata funcţiei compuse $(x + 1)^{2024} = 2024(x + 1)^{2023}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Se demonstrează prin inducţie matematică plecând de la $(e^{-3x})' = -3e^{-3x}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. $F(x) = x^2 + c$, iar din $F(0) = 3$ deducem că $c = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Simplificăm fracţia prin $x - 2$ şi scăpăm de nedeterminare.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $\sin(x-5) \in [-1, 1]$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-5} = 0$. Din "Criteriul cleştelui" limita căutată va fi 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Calcul direct al fiecărei integrale după distribuirea numărătorului şi efectuarea fiecărei împărţiri.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

26. Se utilizează de două ori integrarea prin părţi folosind faptul că $x' = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Din proprietăţile funcţiilor elementare f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Verificarea continuităţii în $x = 2$ conduce la $2 + a = 2a + 3$, deci $a = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29. Prin rezolvarea cazului $[1^\infty]$ ajungem la e^L, unde $L = \lim\limits_{x\to 2;\, x>2} \left(\dfrac{\arcsin(x-2) - x + 2}{(x-2)^2} \right)$. Calculăm L folosind "Regula lui L'Hôpital".

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Se rezolvă în mod similar exerciţiului 29.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 18

1. $|z| = \dfrac{|8+5i|}{|3-4i|} = \dfrac{\sqrt{64+25}}{\sqrt{9+16}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. Deoarece f este de gradul al doilea, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi trebuie să determinăm a, b, c. Din $f(0) = 1$ obţinem că $c = 1$, apoi se rezolvă sistemul $\begin{cases} f(1) = 2, \\ f(2) = 4, \end{cases}$ adică $\begin{cases} a+b+1 = 2, \\ 4a+2b+1 = 4. \end{cases}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Deoarece avem de rezolvat o ecuaţie cu coeficienţi întregi, verificăm dacă există o rădăcină raţională printre divizorii întregi ai lui 4. Observăm că $x = -2$ este rădăcina ecuaţiei şi astfel reuşim descompunerea acesteia în $(x+2)(x^2+5x-2) = 0$. Celelalte rădăcini se determină prin rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea pe care am descoperit-o prin descompunere.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Termenul general al dezvoltării este $T_k = C_{20}^k \cdot 5^{20-k} \cdot 5^{k/2}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$. Pentru ca termenii să fie raţionali trebuie să avem $k \,\vdots\, 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. $f(2)$, $f(3) \in \{1, 2, 3\}$, prin urmare avem $3 \cdot 3$ funcţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. Proprietăţile numerelor în progresie geometrică şi aritmetică ne dau relaţiile $b^2 = 20a$ şi $b = (a+15)/2$. Aşadar, rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea $(a+15)^2/4 = 20a$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. Se foloseşte formula determinantului Vandermonde (sau se demonstrează folosind proprietăţile determinanţilor).

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Folosim formula de la determinantul Vandermonde pentru a constata că rangul nu poate fi 3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Se observă formula la A^1 şi A^2, apoi se demonstrează prin inducţie matematică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Deoarece a, b, $c > 0$, dacă şi $x_0 > 0$ atunci $f(x_0) > 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Cum polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, avem că $\begin{cases} x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0, \\ x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0, \\ x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0. \end{cases}$

Prin urmare,

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -a\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right)-b(x_1+x_2+x_3)-3c.$$

În acelaşi timp, din relaţiile lui Viète ştim că $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c, \end{cases}$

şi înlocuim în relaţia anterioară.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Cum polinomul $f = X^3 + aX + b$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, avem că $\begin{cases} x_1^5 + ax_1^3 + bx_1^2 = 0, \\ x_2^5 + ax_2^3 + bx_2^2 = 0, \\ x_3^5 + ax_3^3 + bx_3^2 = 0. \end{cases}$

Prin urmare,

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

În această relaţie se folosesc relaţiile lui Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a, \\ x_1x_2x_3 = -b. \end{cases}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ deoarece soluţia trebuie să fie în intervalul $[0, \pi]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

15. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

16. Condiţia de coliniaritate ne dă $\dfrac{5}{2} = -\dfrac{a+2}{a}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, cu unghiul C de $30°$, deci deducem că $BC = 8$. Din "Teorema lui Pitagora", $AC = 4\sqrt{3}$. Aria triunghiului dreptunghic este egală cu produsul catetelor supra 2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. Scoatem factor comun forţat 4^x şi sus şi jos.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}(4^x - 3^x)^x = e^L$, unde

$$L = \lim_{x\to 0} x\ln(4^x - 3^x) = \lim_{x\to 0} x\ln\left[4^x\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} x\ln 4^x + \lim_{x\to 0} x\ln\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right) = 0 + \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Aplicând "Regula lui L'Hôpital" obţinem

$$L = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}\cdot x^2\right] = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\lim_{x\to 0}\left[-x^2 - \frac{x^2}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}\right].$$

Aplicând din nou "Regula lui L'Hôpital" (de două ori) obţinem că $L = 0$, deci limita căutată este 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Simplificăm fracţia prin $x - 4$ pentru a scăpa de nedeterminare.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x + 1)}\,dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln x + 1}\,dx = \ln|\ln x + 1|\Big|_1^e.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

22. $$\int_2^5 \sqrt{x^2+3}\,dx = \int_2^5 \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$$

$$= \int_2^5 x(\sqrt{x^2+3})'\,dx + 3\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

24. Folosim formula de derivare a funcţiilor compuse.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $f_1'(x) = (\sin x)'$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $f_5'(x) = \cos x + 2\cos(2x) + 3\cos(3x) + 4\cos(4x) + 5\cos(5x)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Se foloseşte "Regula lui L'Hôpital."
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29. Se calculează asimptotele la $\pm\infty$ ale lui f.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Se calculează asimptotele verticale ale lui f.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 19

1. Notăm $2^x = y$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea $y^2-5y+6 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Din dezvoltarea binomului lui Newton avem că $(1+1)^{2024} = C_{2024}^0 + C_{2024}^1 + C_{2024}^2 + \ldots C_{2024}^{2024}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. $\log_2 16 + \log_9 3 + \log_6 2^7 + \log_6 3^7 = \log_2 2^4 + \log_9 \sqrt{9} + 7\log_6(2\cdot 3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Cum f este bijectivă, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) = -1+2-3+4-5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9) \in \{0,1,\ldots,9\}$, deci avem $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$ funcţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. $|z| = |3i-4|^{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. Se foloseşte "Regula lui Cramer".

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Polinomul f admite descompunerea $f = (X^2-1)(X^2+1)$, de unde deducem că are rădăcinile ± 1, $\pm i$, şi fiecare dintre aceste rădăcini ridicată la puterea 2024 dă 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. Observăm că $x*y = x+y+xy = (x+1)(y+1)-1$. Plecând de la aceasta demonstrăm prin inducţie că

$$\frac{1}{1}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\cdots*\frac{1}{2024} = \left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2024}+1\right)-1,$$

de unde deducem că

$$\frac{1}{1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{2024} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{2005}{2024} - 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. Pentru calculul fiecărui vector folosim formula:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

15. Se foloseşte "Teorema sinusurilor".
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Se folosesc formulele $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Cum x_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$, sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$, deducem că $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{2024})$. Luând în considerare formula de derivare a produsului de 2024 de funcţii, obţinem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_{2024}}.$$

În consecinţă,

$$\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{x_k - 1} = -\frac{f'(1)}{f(1)} = -\frac{2024 + 2023 + \cdots + 1}{f2025}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{x}\, dx = \int_1^2 \left(x^{-2/3} - x^{-3/5}\right)\, dx.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos^4 x}\, dx.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

21. Facem schimbarea de variabilă $\ln x = t$ apoi integrăm prin părţi.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. Integrăm prin părţi, apoi folosim faptul că $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = (\sqrt{x^2 - 1})'$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. Scriem $\cos^n x = (\sin x)' \cos^{n-1} x$ pentru a folosi integrarea prin părţi, apoi înlocuim $\sin^2 x$ utilizând formula $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. Amplificăm cu conjugata.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sin(x-8)}{x^2 - 64} = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sin(x-8)}{(x-8)(x+8)} = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{1}{x+8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. Descompunem $x^{2024} - 1 = (x-1)(x^{2023} + x^{2022} + \cdots + 1)$ pentru a putea simplifica fracţia prin $x - 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Utilizăm formula $\cos^{2024} x - 1 = (\cos x - 1)(\cos^{2023} x + \cos^{2022} x + \cdots + 1)$, după care rezolvăm nedeterminarea din $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ utilizând "Regula lui L'Hôpital" în mod repetat (sau folosim formula unghiului dublu de la funcţii trigonometrice: $\cos x - 1 = -2\sin^2(x/2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Calcul direct, folosind proprietăţile de la puteri.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29. $f'(x) = 100x^{99} + 2x$, $f''(x) = 100 \cdot 99 x^{98} + 2$, $f'''(x) = 100 \cdot 99 \cdot 98 x^{97}$, $\ldots$ $f^{(100)}(x) = 100!$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

30. Funcţia f este continuă într-un punct x_0 dacă şi numai dacă oricare ar fi un şir $(x_n)_n$ care converge la x_0, avem că $(f(x_n))_n$ converge la $f(x_0)$. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, respectiv fie $(y_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$. Căutam x_0 în care f este continuă, deci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$. Prin urmare, avem

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n^2 = x_0^2 = f(x_0),$$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} (4 - 3y_n) = 4 - 3x_0 = f(x_0),$$

şi rezolvăm ecuaţia $x_0^2 = 4 - 3x_0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 20

1. $|z| = |1 - 2i|^8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. Numărul funcţiilor bijective $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ cu proprietatea $f(0) = 0$ este egal cu numărul permutărilor mulţimii $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

3. Forma generală a unei funcţii f de gradul al doilea este $f(x) = ax^2 + bx + c$. Trebuie să determinăm a, b, c ştiind că $f(-2) = 0$, $f(0) = 4$ şi $f(1) = 3$. Din $f(0) = 4$ obţinem că $c = 4$, apoi se rezolvă sistemul
$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0, \\ a + b + 4 = 3. \end{cases}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. Împărţim ecuaţia prin 9^x. Notăm $(2/3)^x = y$ şi rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea $9y^2 - 13y + 4 = 0$ care se formează după această înlocuire.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Ecuaţia nu are nicio soluţie reală dacă şi numai dacă $m^2 - 24 < 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Deoarece $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică, $a_4 + a_{11} = a_7 + a_8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. Folosim proprietăţile logaritmilor: $\log_{25} 40 = \dfrac{\log_2(8 \cdot 5)}{\log_2 25} = \dfrac{3 + \log_2 5}{2 \log_2 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. Observăm că $13 + 6\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})^2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. Observăm că avem un determinant Vandermonde sau folosim proprietăţile determinanţilor pentru a deduce că
$(a - b)(b - 5) = (a - b)(b - 5)(5 - a)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Observăm că liniile matricei sunt direct proporţionale ($l_2 = -2l_1$, $l_3 = 3l_1$), deci toţi minorii de ordin 2 şi 3 vor fi nuli.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. Folosim "Relaţiile lui Viète".

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Se observă formula calculând A^2 şi A^3, apoi se demonstrează prin inducţie matematică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Se determină mijlocul lui (BC) ca fiind $M(1,3)$, apoi se scrie ecuaţia dreptei care trece prin două puncte pentru a găsi ecuaţia lui AM.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. Se foloseşte formula de calcul a ariei unui triunghi cu ajutorul determinanţilor (sau, mai complicat, formula lui Heron).

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Se foloseşte formula: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Dat fiind că $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$ şi $\sin \dfrac{1}{x} \in [-1,1]$, folosim "Criteriul cleştelui".

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. Se scoate 6^x factor comun forţat.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. Rezolvarea cazului de nedeterminare $[1^\infty]$ conduce la $\lim\limits_{x\to 0;\, x>0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^L$, unde $L = \lim\limits_{x\to 0;\, x>0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$ se calculează cu ajutorul "Regulii lui L'Hôpital".

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Pentru a rezolva cazul de nedeterminare care apare scriem limita astfel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(5x))} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(3x)-1)\ln\left(1+(\cos(3x)-1)\right)^{\frac{1}{\cos(3x)-1}}}{(\cos(5x)-1)\ln\left(1+(\cos(5x)-1)\right)^{\frac{1}{\cos(5x)-1}}}.$$

după care folosim formulele funcţiilor trigonometrice (formula unghiului dublu de la cos: $\cos(2y) = 1 - 2\sin^2 y$) şi rezolvarea cazului de nedeterminare $[1^\infty]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Observăm că funcţia de sub integrală este impară, iar capetele integralei sunt ± 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Folosim formula fundamentală a trigonometriei pentru a înlocui 1 cu $\sin^2 x + \cos^2 x$ la numărătorul fracţiei, apoi distribuim numărătorul şi calculăm cele două integrale astfel formate.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

24. Observăm că $x = \dfrac{1}{2}(x^2 + 2024)'$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Calcul direct, folosind proprietăţile puterilor.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. Condiţia de continuitate duce la rezolvarea ecuaţiei $5+3a = 5a+1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Dacă x_0 este punct de continuitate pentru f, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$. Avem aşadar:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 20) = x_0^2 + 20 = f(x_0),$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} (10y_n - 5) = 10x_0 - 5 = f(x_0),$$

şi rezolvăm ecuaţia $x_0^2 + 20 = 10x_0 - 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29. Calcul direct, folosind formula de derivare a funcţiilor compuse.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Ecuaţia tangentei care trece prin A are formula: $y - y_A = m(x - x_A)$, unde $m = f'(x_A)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 21

1. Raţia progresiei este $r = 3$. Din formula termenului general, avem: $a_{2024} = a_1 + 2023 \cdot r$, de unde $a_{2024} = 1 + 2023 \cdot 3 = 6070$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Vom căuta soluţiile ecuaţiei în intervalul $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (condiţiile de existenţă: $5x - 1 \geq 0$ şi $2x - 1 \geq 0$). Prin ridicare la pătrat, obţinem ecuaţia $4x^2 - 9x + 2 = 0$, ce are rădăcinile 2 şi $\dfrac{1}{4}$ (acesta din urmă nu aparţine intervalului $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$).

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Observăm că $x * 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $2 * y = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Rezultă $E = \left(\dfrac{1}{2024} * \dfrac{2}{2024} * \cdots * \dfrac{4047}{2024}\right) * \dfrac{4048}{2024} * \left(\dfrac{4049}{2024} * \cdots * \dfrac{4068}{2024}\right) = 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{1-x} \implies f'(1) = \mathrm{e} - 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Limita se rescrie: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^x \overset{[1^\infty]}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{-3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. $(\sin x + \cos x)^2 = \dfrac{25}{16} \implies 1 + \sin 2x = \dfrac{25}{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. Inegalitatea devine: $(n+1)(n-1) < 16$, adică $n^2 < 17$. Dar n este număr natural, $n \geq 2$, deci $n \in \{2, 3, 4\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Integrala se scrie astfel: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x =$

$= \ln(x+1)\big|_0^1 - \ln(x+2)\big|_0^1 = \ln\dfrac{4}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. Calcul direct.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Observăm că $A^2 = I_3$, de unde $C = 1012(A + I_3) =$

$$= 1012 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2024 & 1012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2024 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Folosind relaţiile lui Viète, avem: $E = \dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. Din teorema sinusului rezultă că triunghiul este dreptunghic în A, de unde $AC = 8$ şi deci $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Din condiţiile de existenţă rezultă că $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$. Ecuaţia devine: $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x} = 0$, de unde $x^2 - x - 2 = 0$, ce are soluţiile 2 şi -1 (aceasta din urmă nu aparţine intervalului $(\sqrt{2}, +\infty)$).

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. $x_1 \neq x_2 \implies m \neq 1$ şi $\Delta > 0$. Dar $\Delta = 4m$, deci $m > 0$ şi $m \neq 1$. Din $x_1 < 2 < x_2$ rezultă $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$, de unde $P - 2S + 4 < 0$. Din toate acestea, deducem că $m \in (0, 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Aplicăm regula lui l'Hospital (cazul $\left[\frac{0}{0}\right]$) şi obţinem: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x) - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. Integrala devine: $\dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\int_0^2 \dfrac{2x}{x^2+9} dx = \dfrac{1}{2} \cdot \ln(x^2+9)\Big|_0^2 =$
$= \dfrac{1}{2} \cdot \ln \dfrac{13}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. $d(A, d) = \dfrac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 15|}{\sqrt{9 + 16}} = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Determinantul matricei sistemului este nenul, şi transformări elementare asupra ecuaţiilor sistemului conduc la unica soluţie a sa, care este $\left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. Dacă z este de forma $z = a + ib$, din relaţia din enunţ obţinem: $|z| = (8 - a) + i(4 - b)$, de unde, evident, $b = 4$.
Dar $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 16}$, iar din relaţia anterioară, $|z| = (8 - a)$. Rezultă ecuaţia $\sqrt{a^2 + 16} = 8 - a$, de unde obţinem, prin ridicare la pătrat, $a = 3$ $(a < 8)$. Aşadar, $|z| = 5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x} - 1$, de unde $f'(0) = -1$, iar ecuaţia tangentei în $(0, 1)$ este $y = -x + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Aplicăm regula lui l'Hospital (cazul $\left[\frac{0}{0}\right]$) şi limita dată devine:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x}{2x} = \frac{1}{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. Dacă α este rădăcina dublă a polinomului, atunci $f'(\alpha) = 0$, de unde obţinem $\alpha = \pm 1$ şi apoi valorile corespunzătoare pentru m, $m = \pm 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. $\mathit{Aria} = \displaystyle\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int_1^2 (x - 1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x =$
$= 2(\mathrm{e} - 1)$ (integrare prin părţi).

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. Asimptota oblică are ecuaţia $y = mx + n$, unde $m = \displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} =$
1 şi $n = \displaystyle\lim_{x\to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x - 2} = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Din condiţia $y_V > 0$ obţinem $-(m - 1)(m - 2) > 0$, de unde $m \in (1, 2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. $5\vec{u} + 3\vec{v} = 7\vec{j}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Ecuaţia devine: $2x^2 + 4x - 6 = 0$, cu rădăcinile 1 şi -3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. $\dfrac{x^4}{x^2+1} = \dfrac{x^4+x^2+1-x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} =$
$= x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$. Integrala se scrie apoi: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x =$
$= \left(\dfrac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Limita din enunţ se mai scrie: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4-2x}} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

30. $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 22

1. Ecuaţia este echivalentă cu: $||x-1|-1|-1=\pm 2$, şi deci $||x-1|-1|\in\{3,-1\}$. Primul caz furnizează două soluţii, $x\in\{5,-3\}$, iar cel de al doilea este imposibil (modulul este pozitiv). Suma soluţiilor este deci 2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $T_{k+1}=C_{72}^{k}\cdot x^{72-k}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=C_{72}^{k}\cdot x^{72-k-\frac{k}{3}}$. Din condiţia enunţului, obţinem $72-k-\frac{k}{3}=0$, de unde $k=54$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

3. Observăm că $x*x*x=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{3}$ şi ecuaţia este echivalentă cu $\left(x+\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{3}=x$. Un factor comun conduce la soluţia $x_1=-\frac{1}{3}$ şi la o ecuaţie de gradul 2, cu rădăcinile $x_2=\frac{2}{3}$ şi $x_3=-\frac{4}{3}$. Suma cerută este deci -1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. $f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-2)(x-1)\implies f'(3)=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Relaţia dată este echivalentă cu $\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=4$, de unde $\dfrac{2}{\sin 2x}=4$ şi deci $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Observăm că $6+4\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^2$, apoi, folosind proprietăţile logaritmilor, rezultă imediat că $a=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$. Integrala devine:

$$\frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\bigg|_1^4=\ln\sqrt{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. Integrala devine: $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x =$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $A(1) + A\left(\frac{1}{2}\right) + A\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + A\left(\frac{1}{2024}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 2024 & 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2024} & \frac{1}{2}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\left(\frac{1}{2024}\right)^2\right] \\ 0 & 2024 & 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2024} \\ 0 & 0 & 2024 \end{pmatrix}.$$

Valoarea determinantului este deci 2024^3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. $x = 1$ este rădăcină triplă, rezultă: $f(1) = 0, f'(1) = 0$ şi $f''(1) = 0$. Obţinem sistemul $\begin{cases} 2a+b+c=2 \\ 5a+3b+2c=1, \\ 6a+3b+c=0 \end{cases}$ iar din prima ecuaţie avem $a+b+c = 2-a$. Operaţii elementare asupra ecuaţiilor sistemului conduc la $a = 2$, de unde $a+b+c = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Avem: $BC^2 = a^2+49$ şi $AB^2+AC^2 = a^2-4a+45$. Aplicând teorema lui Pitagora, obţinem $a = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Avem o progresie geometrică, în care $b_1 = 2^5$, $b_n = 2^{77}$ şi raţia este $q = 2^3$. Aplicăm formula sumei: $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ şi obţinem: $S_n = \frac{2^{77}\cdot 2^3 - 2^5}{2^3-1} = \frac{2^{80}-2^5}{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{S^2-4P}$. Dar $S = m+1$ şi $P = m$ şi din relaţia dată în enunţ obţinem $|m-1| = 1$, de unde $m \in \{0, 2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. $x^{2024} = \left(\dfrac{x^{2025}}{2025}\right)'$ şi aplicăm formula de integrare prin părţi. Integrala considerată are valoarea $-\dfrac{\varepsilon^{2025}}{2025}\cdot\ln\varepsilon - \dfrac{1}{2025^2} + \dfrac{1}{2025^2}\cdot\varepsilon^{2025}$, iar valoarea limitei când $\varepsilon \to 0$ este deci $-\dfrac{1}{2025^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Transformări elementare la numărătorul fracţiei conduc la: $\dfrac{1}{x^3(1+x)} = \dfrac{1+x-x+x^2-x^2+x^3-x^3}{x^3(1+x)} =$
$= \dfrac{(1+x)-x(1+x)+x^2(1+x)-x^3}{x^3(1+x)} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$. Integrala devine: $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{8} + \ln\frac{4}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Ecuaţia dreptei AB este $4x-y-5=0$, de unde deducem imediat valorile lui a şi b: $a = -\dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{5}{4}$. Aşadar $a+b = -\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, soluţiile sale sunt de forma $(7-\alpha, 11-2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Pentru ca soluţiile să fie numere naturale este necesar şi suficient ca $\alpha \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Avem deci 6 astfel de soluţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

19. $|z| = \dfrac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \implies f'(1) = \mathrm{e} - 1$. Ecuaţia tangentei la grafic în punctul cerut este $y = (\mathrm{e}-1)x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Limita din enunţ devine: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(5+\dfrac{\cos x}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)} = \frac{1}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. x_1 este rădăcină a polinomului $\Longrightarrow$ $x_1^4 - 3x_1^2 + 2x_1 + 3 = 0$. Putem împărţi această relaţie cu x_1 (deoarece acesta este nenul) şi obţinem $x_1^3 + \dfrac{3}{x_1} = 3x_1 - 2$. Asemănător procedăm pentru celelalte trei rădăcini ale polinomului şi vom avea pentru expresia cerută:
$E = (3x_1 - 2) + (3x_2 - 2) + (3x_3 - 2) + (3x_4 - 2) = 3S_1 - 8 = -8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Aria $= \displaystyle\int_1^2 \frac{2-x}{x+1}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x =$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x+1-3}{x+1}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln(x+1)\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 + \ln(x+1)\Big|_1^2 + x\Big|_2^3 - 3\ln(x+1)\Big|_2^3 = 3\ln\frac{9}{8}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

24. $m = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Longrightarrow n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$. Deci $y = x$ este ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul lui f.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

25. Ecuaţia este echivalentă cu $x^2 + 3x = 0$, ce are, evident, soluţiile 0 şi -3. Suma acestora este deci -3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, de unde rezultă $m = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Observăm că $x * 13 = 13, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $13 * y = 13, \forall y \in \mathbb{R}$. Rezultă imediat că $E = (1 * 2 * \cdots * 12) * 13 * (14 * 15 * \cdots * 2024) = 13$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Folosim conjugata; limita din enunţ devine:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$

29. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=0$ şi deci limita cerută este 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. $V=\pi\displaystyle\int_0^2 g^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(\frac{x-2}{x+1}-1\right)^2\mathrm{d}x=$

$=\pi\int_0^2\dfrac{9}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=9\pi\cdot\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^2=6\pi.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 23

1. Din condiţiile de existenţă pentru logaritmii implicaţi în ecuaţie, rezultă că $x \in (-2, 2)$. Ecuaţia dată este echivalentă cu $4 - x^2 = = 6 - 3x$, ce are soluţiile 1 şi 2 (aceasta din urmă nu aparţine intervalului $(-2, 2)$). Singura soluţie a ecuaţiei este deci $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

2. Funcţia inversă este: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \dfrac{y+2}{3}, y \in \mathbb{R}$, de unde $g(4) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Inecuaţia dată este echivalentă cu $3x^2 - 3x - 6 \le 0$, sau, echivalent, $x^2 - x - 2 \le 0$, de unde rezultă $x \in [-1, 2]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(1 - 2x)$ şi deci $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $(2 \sin x - 1)(2 \cos x + 3) = 0$, de unde rezultă $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi deci $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. Din condiţiile de existenţă ale radicalilor, rezultă $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Prin ridicare la pătrat obţinem: $x + \sqrt{(x-1)^2} = 1$ sau, echivalent, $|x - 1| = 1 - x$, ecuaţie verificată pentru orice $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Integrala se poate scrie astfel: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x = = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2+4}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $-\left.\dfrac{1}{x+1}\right|_0^a=\dfrac{1}{2}$, de unde rezultă imediat că $a=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Observăm că suma elementelor matricei A este 1 şi că $A^2=I_3$. Rezultă că $A^{2023}+A^{2024}=A+I_3$ şi deci suma elementelor acestei matrice este $1+3=4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Observăm că $E=f(3)=10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. $A=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin B}{2}=5\cdot\sin B=4\implies\sin B=\dfrac{4}{5}$, de unde $\cos B=\dfrac{3}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

13. Suma cerută este suma unei progresii aritmetice cu raţia $r=5$, $a_1=8$ şi $a_n=118$, aşadar valoarea acesteia este $\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=$ $=\dfrac{(8+118)\cdot n}{2}$. Dar $n=\dfrac{a_n-a_1}{r}+1=23$ şi deci suma cerută este $63\cdot 23=1449$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Ecuaţia $f(x)=g(x)$ trebuie să aibă două rădăcini distincte. Ea este echivalentă cu $(m-1)x^2-2(m+1)x-(m+1)=0$. Condiţiile ce trebuie impuse sunt: $m-1\neq 0$ şi $\Delta>0$. Dar $\Delta=8m(m+1)>0\implies$ $m\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. În concluzie, $m\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. Deoarece $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, limita din enunţ se mai poate scrie: $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\cos x)=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left.\mathrm{e}^{x^2}\right|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Dacă M este mijlocul segmentului BC, atunci $M(4,-2)$. Ecuaţia medianei AM este: $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-3}{-2-3}$, adică $5x+3y-14=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

18. Determinantul matricei sistemului este nul, sistemul este simplu nedeterminat, iar soluţia sa (x_0, y_0, z_0) cu $x_0 \neq 0$, este de forma $(-3\alpha, 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Atunci, $\dfrac{2x_0 + y_0}{y_0 - 3z_0} = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $z = 3(1 - i) = 3 - 3i \implies Im(z) = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. $f'(x) = (2x + 2) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + 2x + m) \cdot \mathrm{e}^x \implies f'(0) = 2 + m$, de unde $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Limita cerută se mai scrie: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - x}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Din faptul că orice rădăcină a ecuaţiei verifică ecuaţia, avem: $x_i^3 + 3x_i + 1 = 0, i = 1, 2, 3$, de unde, prin însumare, obţinem: $E + 3S_1 + 3 = 0$. Dar $S_1 = 0$, deci $E = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

23. Avem: $\displaystyle\int_2^a f(x)\mathrm{d}x = \ln 3$, de unde: $\ln a(a - 1) = \ln 6$ şi deci $a^2 - a - 6 = 0$, ce are rădăcinile 3 şi -2, Dar $a > 2$, aşadar valoarea căutată este $a = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $\displaystyle m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{x} = -2$.

$\displaystyle n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}$. Deci ecuaţia este $y = -2x - \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

25. $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot (1 + 1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$ şi deci $a_{2024} = 2024 \cdot 2^{2023}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

26. Din relaţia dată în enunţ, obţinem $\cos \widehat{A} = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$, de unde $\sin \widehat{A} = \dfrac{4}{5}$ şi deci $Aria = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A}}{2} = 16$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Observăm că $x * y = (x-2)(y-2) + m - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $2022^2 + m - 4 = 2022^2 + 2020$, de unde $m = 2024$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Limita din enunţ se mai poate scrie:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(3x)-1} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = -\frac{2}{9} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{9}$ (prima limită se deduce imediat cu regula lui l'Hospital).

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29. Fracţia de sub integrală se mai scrie:

$$\frac{6x}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{x+2},$$

iar integrala din enunţ se scrie astfel:

$$(-2) \cdot \int_3^5 \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x + 3 \cdot \int_3^5 \frac{1}{x-2} \mathrm{d}x - \int_3^5 \frac{1}{x+2} \mathrm{d}x,$$

de unde obţinem, aplicând de trei ori formula $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \mathrm{d}x = \ln|u(x)| + \mathscr{C}$ (împreună cu formula Leibniz-Newton), valoarea integralei: $\ln \frac{135}{28}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. $V = \pi \int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{15}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 24

1. x_1 soluţie a ecuaţiei date $\Longrightarrow$ x_1 verifică ecuaţia, adică $x_1^2-2x_1+5=0$, de unde: $x_1^2-3x_1+4=x_1^2-2x_1+5-x_1-1=-x_1-1$. Asemănător, $x_2^2-3x_2+4=x_2^2-2x_2+5-x_2-1=-x_2-1$. În aceeaşi manieră, $x_1^2-2x_1+3=x_1^2-2x_1+5-2=-2$ şi $x_2^2-2x_2+3=x_2^2-2x_2+5-2=-2$. Astfel, expresia dată devine: $E=\dfrac{x_1+1}{2}+\dfrac{x_2+1}{2}$, adică, $E=\dfrac{S+2}{2}=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Funcţia inversă este $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(y)=\dfrac{y+2}{2}$. Atunci $g(2024)=1013$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Inecuaţia dată este echivalentă cu $3x^2+2x-1\geq 0$, ce are soluţia $x\in(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. $f'(x)=-x\mathrm{e}^{-x}-1, x\in[0,+\infty)$, de unde $f'(0)=-1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Limita cerută este echivalentă cu $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}=$$

$=\dfrac{1}{2}$ (aplicând de două ori regula lui l'Hospital).

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. Ţinând cont de formulele $1+\mathrm{tg}^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ şi $1+\mathrm{ctg}^2x=$ $=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, expresia E devine imediat $E=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu:
$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{2023}{2024}$, de unde $1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2023}{2024}$, adică $n=2023$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. Integrala cerută se rescrie astfel: $\displaystyle\int_0^1 F'(x)\cdot F^2(x)\mathrm{d}x =$
$= \left.\dfrac{F^3(x)}{3}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3}\left[(\mathrm{e}+5)^3 - 8\right].$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Fracţia de sub integrală se descompune în fracţii simple astfel: $\dfrac{3x^2-6x+2}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$, de unde, integrala cerută este $\ln x(x-1)(x-2)\big|_3^5 = \ln 10.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. $A(1)+A(2)+\cdots+A(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 13 & 0 & 13 \\ \dfrac{13\cdot 14}{2} & -\dfrac{13\cdot 14}{2} & 26 \end{pmatrix}$, de unde, determinantul său este $13^3\cdot 7 = 15.379.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. $x_i, i = 1,2,3,4$ rădăcină a ecuaţiei $\implies x_i^3 - 3 =$
$= 1 - \dfrac{1}{x_i} = \dfrac{x_i - 1}{x_i}$, de unde, $E = \dfrac{x_1-1}{x_1}\cdot\dfrac{x_2-1}{x_2}\cdot\dfrac{x_3-1}{x_3}\cdot\dfrac{x_4-1}{x_4} =$
$= \dfrac{f(1)}{S_4} = -2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. Din teorema sinusului, rezultă imediat $R = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. Suma respectivă se rescrie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{2024}(k+1-1)\cdot k! =$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{2024}((k+1)! - k!) = 2025! - 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. Din condiţia $x_V = 1$, obţinem $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Aplicăm proprietatea "$0\cdot$ mărginit $= 0$". Limita este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Funcţia de sub integrală este chiar derivata produsului $\operatorname{arctg}x \cdot \ln(x+1)$. Valoarea integralei este $\frac{\pi}{4}\ln 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Aplicăm formula lui Herron. Semiperimetrul triunghiului este $p = 15$, iar aria sa este $A = \sqrt{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 30\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Determinantul matricei sistemului este nenul, şi transformări elementare asupra ecuaţiilor sistemului conduc la unica soluţie a sa, care este $(-8, -5, -5)$, deci produsul cerut este -200.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. $z + i \cdot z = (-2a+5) + (2a-1)i \in \mathbb{R} \iff 2a - 1 = 0$. Deci $a = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. $f'(x) = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$. Din rezolvarea ecuaţiei $f'(x) = 0$ şi din tabelul de variaţie a funcţiei, rezultă că punctele de extrem sunt $x_1 = 1$ (punct de minim) şi $x_2 = \mathrm{e}^2$ (punct de maxim).

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. Limita cerută este chiar $f'(1)$. Dar $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} +$
$+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, de unde $f'(1) = \dfrac{13}{36}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. Egalitatea din enunţ se rescrie $S_1 = \dfrac{S_2}{S_3}$, de unde avem $\dfrac{5}{-a} = -3$, adică $a = \dfrac{5}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

23. $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x =$
$= \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{5}{6} - \ln 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2 \Longrightarrow n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - 2x) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{x+1}{x-1} = 0$. Deci $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

25. Cu notaţia $2^x = y$, ecuaţia devine $2y^2 - 9y + 4 = 0$, ce are soluţiile $y_1 = 4$ şi $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Deci soluţiile ecuaţiei date sunt $x_1 = 2$ şi $x_2 = -1$. Produsul acestora este -2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. Din teorema cosinusului avem $\cos \widehat{A} = -\dfrac{1}{4}$. Apoi,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A} = -6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. $a = 2x^2, b = \dfrac{3x-12}{2}, c = -11x^2$. Din condiţia $2b = a + c$ obţinem ecuaţia $9x^2 + 3x - 12 = 0$, ce are rădăcinile 1 şi $-\dfrac{4}{3}$. Produsul acestora este $-\dfrac{4}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. Aplicăm regula lui l'Hospital (cazul $\left[\frac{0}{0}\right]$) şi limita dată devine $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{4t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{4(t^2+t+1)} = \dfrac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Integrala se rescrie $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x + \int_0^3 \frac{7}{x^2+9}\mathrm{d}x =$
$= \ln(x^2+9)\Big|_0^3 + \dfrac{7}{3} \cdot \mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}\Big|_0^3 = \ln 2 + \dfrac{7\pi}{12}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. $V = \pi \displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x^3}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\int_0^1 6x^2\mathrm{e}^{2x^3}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} \cdot \mathrm{e}^{2x^3}\Big|_0^1 =$
$= \dfrac{\pi}{6} \cdot (\mathrm{e}^2 - 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 25

1. Fie r raţia progresiei aritmetice. Avem: $a_1 + a_3 + a_{12} + a_{14} = = (a_5 - 4r) + (a_5 - 2r) + (a_{10} + 2r) + (a_{10} + 4r) = 2(a_5 + a_{10}) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $S = (2 \cdot 0 - 3) + (2 \cdot 1 - 3) + (2 \cdot 2 - 3) + \cdots + (2 \cdot 2024 - 3) = = 2 \cdot (0+1+2+\cdots+2024) - 3 \cdot 2025 = 2024 \cdot 2025 - 3 \cdot 2025 = 2025 \cdot 2021$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Avem $x * 1 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $1 * y = 1, \forall y \in \mathbb{R}$, de unde $E = \left(\dfrac{1}{2024} * \dfrac{1}{2023} * \cdots * \dfrac{1}{2}\right) * 1\,(*2 * 3 * \cdots * 2024) = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. $f'(x) = \mathrm{e}^x (x-3)(x-1), x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Dar $f"(x) = \mathrm{e}^x (x-3)(x-1) + \mathrm{e}^x (x-3) + \mathrm{e}^x (x-1), x \in \mathbb{R}$, de unde $f"(1) = -2\mathrm{e} < 0$ şi $f"(3) = 2\mathrm{e}^3 > 0$. Aşadar, $x_1 = 1$ este punct de maxim pentru funcţia f şi $x_2 = 3$ este punct de minim pentru f.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. Notăm cu $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{3^k}$. Avem: $a_n - \dfrac{1}{3} \cdot a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{n+1}{3^{n+1}}$, de unde $a_n = \dfrac{3}{2} \cdot \left[-\dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3^{n+1}} - 1\right) - \dfrac{n+1}{3^{n+1}}\right]$ şi deci $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{9}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. $$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = 2\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Termenul general al dezvoltării se scrie astfel:

$T_{k+1} = C_{25}^k \cdot 2^{\frac{25-k}{2} - \frac{k}{3}} = C_{25}^k \cdot 2^{\frac{75-5k}{6}}$. Din condiţiile $15 - k \vdots 6$ şi $0 \leq k \leq 25$ rezultă imediat că $k \in \{3, 9, 15, 21\}$, deci avem 4 termeni raţionali în dezvoltarea din enunţ.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. Avem: $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x =$
$= \displaystyle\frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u =$
$= \displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{u}{u+1}\bigg|_1^{t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{t^2+1}$. Aşadar, limita cerută este $\ln\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Scriem funcţia de sub integrală ca o sumă de funcţii raţionale simple. Avem: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+4x+4}\mathrm{d}x =$
$= \displaystyle\int_0^1 \left(x - 4 + \frac{12}{x+2} - 8\frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x =$
$= \displaystyle\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - 4x\big|_0^1 + 12\ln(x+2)\big|_0^1 + 8\,\frac{1}{x+2}\bigg|_0^1 = -\frac{29}{6} + 12\ln\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Observăm că $A(x)\cdot A(y) = A(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Rezultă că $A(5)\cdot A(-7)\cdot A(3) = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. Valoarea expresiei E este $E = \dfrac{f'(2)}{f(2)} = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. Din datele enunţului rezultă imediat că $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, iar din teorema sinusului avem $\dfrac{6}{\sin\widehat{A}} = 2R$, de unde $R = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Folosind proprietăţile logaritmilor, numărul din enunţ se rescrie $\log_{2024}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{2024}\right)\right] = \log_{2024}\frac{1}{2024} = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. $\dfrac{a_1+a_2}{a_2+a_3} = \dfrac{a_1+a_2}{a_1\cdot 2024 + a_2\cdot 2024} = \dfrac{1}{2024}$. Analog pentru celelalte fracţii implicate în suma cerută. Rezultă $S = \dfrac{1}{2024}\cdot 2023 = \dfrac{2023}{2024}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Limita din enunţ se rescrie:
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4.$$
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

16. Integrala cerută se mai poate scrie astfel:
$$(-3)\int_3^6\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\int_3^6\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+4\int_3^6\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x=$$
$$=(-3)\ln(x-1)\Big|_3^6+\left.\frac{1}{x-1}\right|_3^6+4\ln(x-2)\Big|_3^6=\ln\frac{8}{125}+4\ln 4-\frac{3}{10}.$$
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Din condiţia $\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$ obţinem $\begin{vmatrix}-2 & a & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & -7 & 1\end{vmatrix}=0$, de unde $a=-10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Determinantul matricei sistemului este nenul, şi transformări elementare asupra ecuaţiilor sistemului conduc la unica soluţie a sa, care este $(1,3,4)$, aşadar suma cerută este $x_0+y_0+z_0=8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. Din condiţia $|z|=5$ obţinem $9+m^2=25$, de unde $m=4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. $f'(x)=0 \iff \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}=0$, ce are soluţiile $x_1=2+\sqrt{6}$ şi $x_2=2-\sqrt{6}$. Din studiul tabelului de variaţie a funcţiei deducem că acestea sunt punctele de extrem ale funcţiei f (x_1 este punct de minim, iar x_2 este de maxim). Suma valorilor în aceste puncte este $f(x_1)+f(x_2)=10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Limita se rescrie $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

22. Din condiţia de progresie aritmetică rezultă că 1 este rădăcină a polinomului şi deci $f(1)=0$, de unde $a+b=2$. Cea de a doua condiţie conduce la relaţia $S_1^2-2S_2=11$, de unde $a=-1$ şi pentru b obţinem imediat valoarea 3.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \mathrm{d}x = 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \mathrm{d}x -$
$-3 \int_1^{e^2} (\ln x)' \cdot \ln x \mathrm{d}x = \frac{15e^4 - 7}{2}$ (integrare prin părţi).

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. Din condiţia $n = 0$ rezultă $\lim_{x\to\infty} \frac{(a-1)x + b}{x+1} = 0$, de unde $a - 1 = 0$, deci $a = 1$. Apoi, $f'(1) = 0 \implies 4 - b = 0$, deci $b = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Din proprietăţile logaritmilor avem:
$S = \frac{1}{\log_2(2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2024^2)} + \frac{1}{\log_3(2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2024^2)} + \cdots + \frac{1}{\log_{2024}(2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2024^2)} =$
$= \log_{(2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 2024^2)}(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024) = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, deci vectorii sunt perpendiculari.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Observăm că $\frac{1}{x} * \frac{1}{y} = x * y, \forall x, y \in (0, +\infty)$, de unde $E = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. $I_n = \ln \frac{2n+2}{n+2}, n \in \mathrm{N}^*$, de unde limita cerută devine:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln \frac{2n+4}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \ln e = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29. Limita se rescrie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} + x^2} = \frac{3}{1 + 1 + 1} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

30. $V = \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(\int_0^1 e^{2x} \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x - 2 \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \right) =$

$$= \pi \left(\left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_0^1 + 1 - 2 \left. e^x \right|_0^1 \right) = \pi \cdot \frac{e^2 - 4e + 5}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 26

1. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \cos \dfrac{5}{\sqrt{x}} = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$ şi $\left|\cos \frac{5}{\sqrt{x}}\right| \leq 1, \forall x \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Inecuaţia devine $\dfrac{2-x}{x+1} - \dfrac{3-x}{x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{-3}{x(x+1)} \geq 0 \Rightarrow x \in (-1, 0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. $\dfrac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. $f'(0) = 2e^0 \cos 0 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x =$

$= e^x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{2\pi} - \displaystyle\int_0^{2\pi} e^x(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x =$

$= e^{2\pi} - 1 - e^x(\cos x - \sin x)\Big|_0^{2\pi} + \displaystyle\int_0^{2\pi} e^x(-\sin x - \cos x)\mathrm{d}x \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} e^x(\sin x + \cos x)dx = \dfrac{1}{2}(e^{2\pi} - 1 - e^{2\pi} + 1) = 0$.

Metoda a II-a: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = e^x \sin x\Big|_0^{2\pi} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Avem $\hat{3}^2 = \hat{2}$; $\hat{3}^3 = \hat{6}$; $\hat{3}^4 = \hat{4}$; $\hat{3}^5 = \hat{5}$; $\hat{3}^6 = \hat{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{3}^{2023} = \hat{3} \cdot \hat{3}^{2022} = \hat{3} \cdot (\hat{3}^6)^{337} = \hat{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. Mijlocul segmentului (AB) este $M(0, 3)$. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Mediatoarea are panta $m = -2 \Rightarrow$ ec. mediatoarei este $y = -2x + 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 8I_3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Cum $A^2 - 2A = 8I_3 \Rightarrow A(A - 2I_3) = 8I_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{8}(A - 2I_3) = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. Cum $A^2 - 2A = 8I_3 \Big| + 4I_3 \Rightarrow A^2 + 2A = 4(A + 2I_3) \Big| \cdot A \Rightarrow$
$A^3 + 2A^2 = 4(A^2 + 2A) = 4^2(A + 2I_3)$.
Prin inducţie după $n \geq 1$, avem că $A^{n+1} + 2A^n = 4^n(A + 2I_3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $f'(x) = (-xF(x))' = -F(x) - xF'(x) \Rightarrow f'(0) = -F(0) = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. $d(A, d) = \dfrac{|-5 \cdot (-1) + 12 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = \dfrac{13}{13} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = (-1)^2 - 2m \Rightarrow m = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. Cum polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ are o rădăcină număr întreg, aceasta poate fi ± 1.
Dacă $f(1) = 0 \Rightarrow m = -3 \in \mathbb{Z}$.
Dacă $f(-1) = 0 \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{Z}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. $\dfrac{1}{x_1^3 + x_1^2 + 1} + \dfrac{1}{x_2^3 + x_2^2 + 1} + \dfrac{1}{x_3^3 + x_3^2 + 1} =$
$= \dfrac{1}{-mx_1} + \dfrac{1}{-mx_2} + \dfrac{1}{-mx_3} = \dfrac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{-mx_1x_2x_3} =$
$= \dfrac{m}{-m(-1)} = 1, \forall m \neq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\Big|_0^1 =$
$= 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$;
$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y = 2x$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. Facem substituţia $f^{-1}(x) = t \Rightarrow x = f(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = f'(t)dt$.
Pentru $x = 0 \Rightarrow t = 0$ şi $x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 1$.
Obţinem $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} f^{-1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t = tf(t)\big|_0^1 - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$
$= f(1) - \ln \dfrac{e}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}(1 + \ln 2)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. $\log_{2024} |z| = \log_{2024} \frac{\sqrt{4^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+4^2}} = \log_{2024} 1 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2}}dx = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| \mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{x}{2}\mathrm{d}x = -4\cos \frac{x}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3xe + 4x + 4e + 4 = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x(e+1) + 4(e+1) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = -1 \in \mathbb{Z}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. $x * x' = x' * x = e \Rightarrow 3xx' + 4x + 4x' + 4 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x'(3x+4) = -4x - 5 \Rightarrow x' = -\frac{4x+5}{3x+4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x + 4\big|4x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 4\big|12x + 15$.
Cum $3x + 4\big|12x + 16$, obţinem că $3x + 4\big|1 \Rightarrow 3x + 4 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. Cum ecuaţia $x * x' = -1$ are soluţia unică $x' = -1$, atunci $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{2024 \text{ ori } x} = -1$, şi pe acelaşi principiu, obţinem $x = -1$ soluţie unică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Parabola este tangentă la Ox dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o soluţie $\Rightarrow m^2 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

26. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \left(\sin x\right)' \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Ecuaţia se scrie $\log_3 \frac{4^{x-1}+5}{2^{x-1}+1} = 1 \Rightarrow \frac{4^{x-1}+5}{2^{x-1}+1} = 3$.
Notăm $2^{x-1} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{4x}{x^2-4} = \frac{2-3x}{x^2-4} \Rightarrow f'(3) = -\frac{7}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29. $\displaystyle f'(x) = \frac{2-3x}{x^2-4} < 0$, $\forall x \in (2,\infty) \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(2,\infty)$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln \frac{1}{(x-2)(x+2)^2} = \ln \frac{1}{0_+} = \infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} \ln\left(x-2\right)(x+2)^2 = -\infty.$$

Cum f este continuă şi descrescătoare pe $(2,\infty)$, rezultă că $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\ln(x-2)^{x-2} - 2\left(\ln(x-2)^{x-2} + \ln(x+2)^{x-2}\right)\right)$.

Cum $\displaystyle\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} = 1$, obţinem $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)f(x) = \ln 1 - 2(\ln 1 + \ln 4^0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 27

1. $\sqrt[3]{x-2}+2=x \Rightarrow (x-2)=(x-2)^3 \Rightarrow x \in \{1,2,3\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. $f'(x)=2023x^{2022}\sin(x^{2024})+2024x^{4046}\cos(x^{2024}) \Rightarrow f'(0)=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2024}\int \left(x^{2024}\right)'\sin(x^{2024})\mathrm{d}x =$
$-\dfrac{\cos(x^{2024})}{2024}+\mathscr{C}$.
Dar $F(0)=-\dfrac{1}{2024} \Rightarrow \mathscr{C}=0$ şi astfel $F(\sqrt[2024]{\pi})=-\dfrac{\cos\pi}{2024}=\dfrac{1}{2024}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{2024}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^{2024}}{x}=0$ (mărginit ori zero).

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. $T_{k+1}=C_{15}^{k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15-k}\sqrt{17}^{k}=C_{15}^{k}3^{5-\frac{k}{3}}17^{\frac{k}{2}}$, $k\in\{0,1,2,...,15\}$.
Determinăm numărul termenilor raţionali: $T_{k+1}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases}\frac{k}{3}\in\mathbb{Z}\\ \frac{k}{2}\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6|k \Rightarrow k\in\{0,6,12\} \Rightarrow$ 3 termeni raţionali.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x+a^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=\lim_{x\to0}\left[\left(1-\frac{3^x+a^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{3^x+a^x-2}}\right]^{\frac{3^x+a^x-2}{2x}}=$
$=e^{\frac{1}{2}(\ln3+\ln a)}=\sqrt{3a} \Rightarrow \sqrt{3a}=3\sqrt{2} \Rightarrow a=6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. f descrescătoare pe $[-2,2] \Rightarrow f'(x)\le0, \forall x\in[-2,2] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x+m\le0, \forall x\in[-2,2] \Rightarrow 4+m\le0 \Rightarrow m\le-4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8. f strict descrescătoare pe $[-2,2] \Rightarrow m\le-4$.
f strict crescătoare pe $[-2,2] \Rightarrow f'(x)\ge0, \forall x\in[-2,2] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x+m\ge0, \forall x\in[-2,2] \Rightarrow -4+m\ge0 \Rightarrow m\ge4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. $\cos^2 a=1-\sin^2 a=\dfrac{1}{2}$, $a\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right) \Rightarrow \cos a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin a-\cos a=\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in [0, \infty) \Rightarrow \log_{15}(15^x + 15^e - 1) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 15^x + 15^e - 1 = 15^x, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow e = 0 \in [0, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Cum $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{16 \text{ ori } x} = \log_{15}(16 \cdot 15^x - 15)$, ecuaţia devine
$\log_{15}(16 \cdot 15^x - 15) = 2x \Rightarrow 16 \cdot 15^x - 15 = 15^{2x}$.
Facem substituţia $15^x = t$ şi obţinem
$t^2 - 16t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 15 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. $f'(x) = -\dfrac{4x^3 + 4}{x^2(x^3 + 4)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(0, \infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} x^5 f'(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^5(4x^3 + 4)}{x^2(x^3 + 4)^2} = -4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^2}{x^3(x^3 + 4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\left(\int_1^2 \frac{(x^3)'}{x^3}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{(x^3 + 4)'}{x^3 + 4}\mathrm{d}x\right) =$
$= \dfrac{1}{12}\left(\ln x^3 - \ln(x^3 + 4)\right)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{12} \ln \dfrac{10}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. $E = \dfrac{x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} + (m - 1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. Pentru $m = 2 \Rightarrow f = X^4 + X^3 + X + 1 = (X + 1)(X^3 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{4} |x_k| = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. $(X^2 - 1)|f \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ 4 - 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. $E = \sin\left(674\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(674\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{2\pi}{3} =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $S = \sum_{k=2}^{2024} \dfrac{\ln k}{\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + ... + \ln 2024} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. $f'(x) = \dfrac{16 - 2x^3}{x^3 + 16} \Rightarrow f$ crescătoare pe $[0, 2]$ şi descrescătoare pe $[2, \infty)$.

Cum $f(0) = 0, f(2) = \dfrac{1}{12}, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi f continuă pe $[0, \infty)$, obţinem că $\mathrm{Im} f = \left[0, \dfrac{1}{12}\right]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 16}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3 + 16)'}{x^3 + 16}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(x^3 + 16)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{17}{16}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

22. $E = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + 1 = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $E = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k (-2)^k \cdot 1^{4n-k} = (-2 + 1)^{4n} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

24. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow 3m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m_1 = -\sqrt{2} < 0$ şi $m_2 = \sqrt{2} > 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \dfrac{\pi}{2} = \infty;$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\pi}{2};$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - \dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{arctg}(x^2) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3}{1 + x^4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}x$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{arctg}(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'\mathrm{arctg}(x^2)\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}(x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln(1 + x^4)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Notăm $3^{\sqrt[3]{x-1}} = y > 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y \in \{1, 3\} \Rightarrow x \in \{1, 2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. $2R = \dfrac{AC}{\sin(\sphericalangle B)} \Rightarrow R = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29. $\begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m+2 \\ m+2 & m+1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ m & 1 & 2 \\ m+2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

Varianta 28

1. $(1-i)^{2024}+(1+i)^{2024}=(-2i)^{2024}+(2i)^{2024}=2\cdot 2^{1012}\cdot(i^4)^{253}=2^{2013}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. $d=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. $x^3-3x-2=0 \Rightarrow x_1=2, x_{2,3}=-1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Din $x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2x_3=x_1+x_2 \Rightarrow -b=0-x_3 \Rightarrow x_3=b \Rightarrow b^3+ab+b=0 \Rightarrow a^2+b+1=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. $n\in\{1,2,3,5\}$ verifică ecuaţia. $P=\dfrac{\text{Nr. cazurilor favorabile}}{\text{Nr. cazurilor posibile}}=\dfrac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{6} \Rightarrow \log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 x+\dfrac{1}{3}\log_3 x=\dfrac{11}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{11}{6}\log_3 x=\dfrac{11}{6} \Rightarrow x=3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. $\triangle>0 \Rightarrow m^2-4>0 \Rightarrow m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $x*e=e*x=x \Rightarrow x+e+2=x \Rightarrow e=-2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. $C_n^0*C_n^1*C_n^2*...*C_n^n=2n+32 \Rightarrow$
$\Rightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n+2n=2n+32 \Rightarrow (1+1)^n=2^5 \Rightarrow n=5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $\det(A)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m+1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-m-1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. SPentru $m\neq -1$ sistemul admite soluţia $(-m,0,0) \Rightarrow m=-2024$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. $a_5=4\sqrt{3} \Rightarrow a_1+4r=4\sqrt{3} \Rightarrow a_1+4(\sqrt{3}-1)=4\sqrt{3} \Rightarrow a_1=4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 66\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{11(2a_1 + 10r)}{2} = 66\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + 5r = 6\sqrt{3}$. Dar $a_1 + 4r = 4\sqrt{3}$, rezultă că $r = 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. $f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, $f''(x) = -2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(-1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = x \ln \frac{1}{x^2+1}\bigg|_0^1 - \int_0^1 x\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \ln \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = -\ln 2 + 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \ln e^{-1} = -1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{4-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)'(4-x^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{(4-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^2 =$
$\displaystyle= \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f$ descrescătoare $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,\infty) \Rightarrow$
$x = 1$ punct de minim $\Rightarrow f(1) = 2$ valoarea minimă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ asimptotă verticală la dreapta.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1, n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = 0 \Rightarrow y = x$
asimptotă oblică spre $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}} \Rightarrow f$ crescătoare pe $(-\infty, -2]$, descrescătoare pe $[-2, 0)$ şi crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow x = -2$ punct de maxim şi $x = 0$ punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, & x < 0 \\ 2x + 4, & x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = 2 \Rightarrow f'_d(0) = 2$ şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = 4 \Rightarrow f'_s(0) = 4$. Astfel f nu este derivabilă în $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} + c_1, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x + c_2, & x > 0. \end{cases}$

F este o primitivă $\Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2} + c_1 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} + c, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x + c + \frac{1}{2}, & x > 0. \end{cases}$

Cum $F(0) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F(1) = \dfrac{1}{3} + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x (t - \arcsin t)\mathrm{d}t}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{4x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{12x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 1 - x^2}{12x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2} + 1)} = -\dfrac{1}{24}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 2 \Rightarrow f'(1) + f(1) = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x)' \sin^3 x \mathrm{d}x = \left. \dfrac{\sin^4 x}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{64}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. Din continuitate rezultă că $1 + a + b = 0$.

Avem $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$ Pentru a fi derivabilă în $x = 1 \Rightarrow 2 + a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. $\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. Cum panta dreptei d_2 este $m_2 = -\frac{1}{2}$, rezultă că panta dreptei d_1 este $m_1 = 2$.

Pe de altă parte $A(1, 2) \in d_1$ şi astfel $d_1 : 2x - y = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

29. Cum $G\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă că $\begin{cases} \dfrac{0+a+3}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = -2 \\ \dfrac{2+1+b}{3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow b = 1. \end{cases}$

$\text{Aria}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\triangle|$, unde $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. $d(A,d) = \dfrac{|-3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 2|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \dfrac{7}{5}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 29

1. Cum $(1-i\sqrt{3})^3=(1+i\sqrt{3})^3=-8$, obţinem
$$E=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{3\cdot 674+2}=\frac{(-8)^{674}(1+i\sqrt{3})^2}{(-8)^{674}(1-i\sqrt{3})^2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}.$$
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. $$\frac{C_{n+2}^2\cdot P_2-A_{n+2}^2}{P_2}=\frac{\frac{(n+2)!}{2!n!}\cdot 2!-\frac{(n+2)!}{n!}}{2!}=0.$$
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. $S=\dfrac{8(\widehat{1}+\widehat{15})}{\widehat{2}}=\widehat{0}.$
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. $x_1=1$ rădăcină $\Rightarrow 1-6+2m-1-m=0\Rightarrow m=6$.
Ecuaţia devine: $x^3-6x^2+11x-6=0\Rightarrow x_2=2, x_3=3$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. Din relaţiile lui Viète avem $2x_1x_2x_3-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=2m-(2m-1)=1$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. x_1,x_2,x_3 în p.a. $\Rightarrow \frac{x_1+x_3}{2}=x_2$. Dar $x_1+x_2+x_3=6\Rightarrow x_2=2\Rightarrow m=6$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. $$det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1&a&0\\1&b&1\\1&c&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\1&b&1\\0&c-b&0\end{vmatrix}=b-c.$$
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. Cum $det(A(a,2,3))=-1\neq 0, \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow$ matricea $A(a,2,3)$ inversabilă pentru orice a real.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. $$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&a&0\\1&b&1\\1&c&1\end{vmatrix}=b-c,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0,$$
$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&a&1\\1&b&1\\1&c&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\det(A(a,b,c))}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\det(A(a,b,c))}=0,$$
$z=\frac{\Delta_z}{\det(A(a,b,c))}=0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Facem substituţia $\log_2^2 x = t \geq 0$ şi obţinem ecuaţia $t^2 - 17t + 16 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 16$.

$t_1 = 1 \Rightarrow \log_2^2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$.

$t_2 = 16 \Rightarrow \log_2^2 x = 16 \Rightarrow x_3 = 16,\ x_4 = \dfrac{1}{16}$.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 + \dfrac{1}{2} + 16 + \dfrac{1}{16} = \dfrac{297}{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. $x * e = e * x = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-3)(e-4) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. $2 * x' = x' * 2 = 4 \Rightarrow -x' + 6 = 4 \Rightarrow x' = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Cum $x * 3 = 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt{1} * \sqrt{2} * ... * \sqrt{8}\right) * \sqrt{9} * \left(\sqrt{10} * \sqrt{11} * ... * \sqrt{2024}\right) = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{(x^5+1)'}{x^5+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln(x^5+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x) + x^5 f(x)}{x^{10}+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{arctg}(x^5)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt = f(2) = \frac{16}{33}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Cum $f'(x) = e^x + 4x^3$, $f''(x) = e^x + 12x^2$, obţinem $-f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x - 1 \Rightarrow x^4 + 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = -6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

18. $f''(x) = e^x + 12x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. f injectivă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x^2 + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+\cos^2 x)'}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x =$

$= -\ln(1+\cos^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(e^2) = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. f este crescătoare pe $(0, e^2]$ şi descrescătoare pe $[e^2, \infty)$.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(e^2) = \dfrac{2}{e}$ şi f continuă pe $(0,\infty)$,

rezultă că $\mathrm{Im} f = \left(-\infty, \dfrac{2}{e}\right]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Cum f crescătoare pe $(0, e^2]$ şi $5 < 7 < e^2$ rezultă că

$f(5) < f(7) \Rightarrow \dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}} < \dfrac{\ln 7}{\sqrt{7}} \Rightarrow 5^{\sqrt{7}} < 7^{\sqrt{5}}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. $F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x + c_2, & x \in (0, 2) \\ x^2 - 2x + c_3, & x \in (2, \infty). \end{cases}$

F este o primitivă a lui $f \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + c_1 = c_2 \\ c_2 + 4 = c_3 \end{cases} \Rightarrow$

$F(x) = \begin{cases} e^x + c - 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + x + c, & x \in [0, 2) \\ x^2 - 2x + c + 4, & x \in [2, \infty). \end{cases}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ şi $|\sin x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

28. $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\dfrac{2}{3} = \dfrac{-m}{2} \Rightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Din Teorema cosinusului avem că $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. $E = \sin\left(506\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(506\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\dfrac{\pi}{4} =$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

Varianta 30

1. Ecuaţia $z^2 - 4z + 6 = 0$ are rădăcinile $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}i$.
$|z_1| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$;
$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $T_{k+1} = C_{13}^k \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{13-k} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\right)^k$. Impunem condiţia $\frac{13-k}{2} - \frac{k}{3} = 4 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = C_{13}^3 \frac{a^4}{2^7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i-1 & -i-1 \\ 1 & -i-1 & i-1 \end{vmatrix} = (i-1)^2 - (-i-1)^2 = -4i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. $g = (x+1)(x^2+1) \Rightarrow y_1 = -1, y_{2,3} = \pm i \Rightarrow |y_1| + |y_2| + |y_3| = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. $f = X \cdot g + 1 \Rightarrow$ câtul este X şi restul 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Din $f = X \cdot g + 1 \Rightarrow f(x_k) = x_k g(x_k) + 1, k \in \overline{1,4}$.
Cum $f(x_k) = 0 \Rightarrow g(x_k) = -\frac{1}{x_k} \Rightarrow N = \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. $a_2 = 0 \Rightarrow a_1 + r = 0$; $a_5 = -6 \Rightarrow a_1 + 4r = -6 \Rightarrow r = -2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 - 4 - 2 = -5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. $2x + 1 \geq -x + 4 \Rightarrow 3x + 3 \geq 3 \Rightarrow x \in [1, +\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Submulţimile sunt $\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$, $\{\widehat{1}, \widehat{2}\}$ şi $\{\widehat{0}\} \Rightarrow Nr. = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. $x * e = e * x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4(x-1)(e-1) + 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-1)(4e-5) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $x * x = x * x = \frac{5}{4} \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{5}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. Cum $x * 1 = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1012} * \frac{2}{1012} * ... * \frac{1011}{1012}\right) * \frac{1012}{1012} * \left(\frac{1013}{1012} * \frac{1014}{1012} * ... * \frac{2024}{1012}\right) = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. $f \circ f = 0 \Rightarrow -2(-2x+6)+6 = 0 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x + 5^x}{2^x - 5^{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1\right)}{5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5\right)} = \frac{0+1}{0-5} = -\frac{1}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} 5\frac{e^{\frac{5}{x}} - 1}{\frac{5}{x}} = 5$.

Astfel, $y = x + 5$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $I = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{(e^x + 2x + 2)'}{e^x + 2x + 2}\right) \mathrm{d}x = 1 - \ln(e^x + 2x + 2)\Big|_{-1}^{0} = -\ln 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în $x = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0 \Rightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow b = \frac{1}{e}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3e^{3x-1}, & x < 0 \\ 2x + a, & x > 0. \end{cases}$$

Cum $f'_s(0) = \frac{3}{e}$, $f'_d(0) = a$ şi f derivabilă în $x = 0$, rezultă că $a = \frac{3}{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{x^2+4}\right) dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \ln(x^2+4)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2} - \ln 5 + \ln 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. Facem substituţia $f^{-1}(x) = t \Rightarrow x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt$.
Pentru $x = 0 \Rightarrow t = 0$ şi $x = \frac{3}{5} \Rightarrow t = 1$.
Obţinem $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = tf(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt$
$= f(1) - \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{10} + \ln\dfrac{5}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\right)^{\sqrt[4]{x}} = [1^\infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\right)^{\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{-2\sqrt[4]{x}}}\right]^{-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}} = e^{-2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $f'(x) = (3(x+1)F(x))' = 3F(x) + 3(x+1)F'(x)$
$\Rightarrow f'(-1) = 3F(-1) = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. $f'(x) = \dfrac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}} \Rightarrow f$ crescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right]$, descrescătoare pe $\left[-\dfrac{2}{3}, 0\right]$ şi crescătoare pe $[0,\infty) \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ punct de maxim şi $x = 0$ punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. $f'(x) = \dfrac{-10}{(x+5)(x-5)} \Rightarrow f'(15) = -\dfrac{1}{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Facem substituţia $y = -x$ şi oţinem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to\infty}\sqrt{4y^2+1} - 2y - 3 = \lim_{y\to\infty}\frac{4y^2+1-(2y+3)^2}{\sqrt{4y^2+1}+2y+3} =$$
$$= \lim_{y\to\infty}\frac{-12y-8}{\sqrt{4y^2+1}+2y+3} = -3.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

26. $y = -3$ asimptotă orizontală spre $-\infty$.
$y = 4x - 3$ asimptotă oblică spre ∞.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. $E = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1 - 2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} = 5\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$.
Astfel lungimea laturii BC este $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29. $d_1 || d_2 \Rightarrow m_1 = m_2 = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$.
Cum $A(0,1) \in d_1 \Rightarrow d_1 : y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. $2R = \dfrac{AC}{\sin(\sphericalangle B)} \Rightarrow R = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 31

1. Cum $2x_1$, x_2, $3x_2$ sunt în progresie aritmetică avem: $\dfrac{2x_1+3x_2}{2} = x_2$, deci $2x_1 + 3x_2 = 2x_2, -2x_1 = x_2$. Cum $x_1 + x_2 = -3 \Longrightarrow x_1 - 2x_1 = -3 \Longrightarrow x_1 = 3, x_2 = -6$. Ştim că $x_1x_2 = a$, deci $a = -18$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. Notând cu V vârful parabolei se stie că $V(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a})$.

Deci avem: $V(-\dfrac{m}{2}, -\dfrac{m^2+4}{4})$.

Impunând ca acest punct să se afle pe prima bisectoare a axelor de coordonate, de ecuaţie $y = x$, obţinem ecuaţia pe care o verifică m: $-\dfrac{m}{2} = -\dfrac{m^2+4}{4} \Longleftrightarrow 2m = m^2 + 4 \Longleftrightarrow m^2 - 2m + 4 = 0$. $\Delta = 4 - 16 = -12 \Longrightarrow$ecuaţia nu are rădăcini reale, astfel nu există valori reale ale lui m, care să satisfacă cerinţa.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

3. Cum $f(1) = f(2) = a$, a poate lua oricare dintre cele 5 valori din codomeniul funcţiei ($a = 1, a = 2, a = 3, a = 4, a = 5$), adică avem 5 variante de alegere. Fixând o astfel de valoare pentru a, rămân două valori ale argumentelor (3, respectiv 4) cărora le putem asocia oricare din valorile din codomeniu. Astfel numărul situaţiilor posibile coincide cu numarul funcţiilor definite pe o multime cu 2 elemente ($3, 4$ fiind acestea) cu valori într-o multime cu 5 elemente $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Avem deci 5^2 variante de alegere. Astfel, aplicând regula produsului, obţinem numărul total de funcţii, adică $5 \cdot 5^2 = 5^3 = 125$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. Din condiţiile de existenţă a logaritmilor deducem: $5x > 0 \Longleftrightarrow x > 0$.

Putem rescrie ecuaţia astfel: $\log_2(x^2+5) + \log_2 4 = 4\dfrac{\log_2(5x)}{\log_2 4} \Longleftrightarrow \log_2 4(x^2+5) = 2\log_2(5x) \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow \log_2 4(x^2+5) = \log_2(25x^2) \Longleftrightarrow 4(x^2+5) = 25x^2 \Longleftrightarrow 21x^2 = 20 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{20}{21}$.

Ţinând cont că $x > 0$, găsim $x = \sqrt{\dfrac{20}{21}}$. Astfel, suma cerută este $\sqrt{\dfrac{20}{21}}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

5. Cum $z \neq 0$ avem că $\overline{z} \neq 0$, iar din $2z + (1+\sqrt{3}i)\overline{z} = 0$ rezultă $\dfrac{z}{\overline{z}} = -\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Atunci $\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^6 = \left(\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2\right)^3 = \left(\dfrac{z^2}{|z|^2}\right)^3 =$

$= \left(\dfrac{z^2}{z \cdot \overline{z}}\right)^3 = \left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^3 = \left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Prin calcul direct, sau folosind teorema Cayley Hamilton ($A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$; unde $\mathrm{Tr}(A) = 4$, $\det(A) = 5$) obţinem: $A^2 - 4A + 5I_2 = O_2$. Astfel deducem că $\det(A^2 - 9A+5I_2) = \det(A^2-4A+5I_2-5A) = \det(-5A) = 25\det(A) = 25 \cdot 5 = 5^3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Un sistem este incompatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului diferă de rangul matricei extinse. Pentru sistemul dat,

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ -x + y - mz = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases} : A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -1 & 1 & -m \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 1 \\ -1 & 1 & -m & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{rang}(\overline{A}) = 3$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Astfel, sistemul este incompatibil $\Longleftrightarrow \mathrm{rang}(A) < 3$.

Dar $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, deci $\mathrm{rang}(A) \geq 2$. Deducem că sistemul este incompatibil $\Longleftrightarrow \mathrm{rang}(A) = 2 \Longleftrightarrow \det(A) = 0$.

$\det(A) = -6m - 9 = 0 \Longleftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. $x{*}y = 2axy + 3x + 3y - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ admite element neutru $\Longleftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x{*}e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Legea este în mod evident comutativă, adică prima egalitate din relaţia precedentă este adevărată.

Considerăm $x{*}e = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow 2axe+3x+3e-1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$2axe + 2x + 3e - 1 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow 2x\,(ae+1) = 1 - 3e$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow ae+1=0$, deoarece în caz contrar relaţia ar fi satisfăcută doar de valoarea $x=\dfrac{1-3e}{2(ae+1)}\in\mathbb{R}$.

Dar $ae+1=0 \Longrightarrow 1-3e=0 \Longrightarrow e=\dfrac{1}{3}$. Astfel, din $ae+1=0$, obţinem $\dfrac{a}{3}+1=0$, adică $a=-3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$.Avem $(f^{-1}\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(f^{-1}(3))$.
Notând $f^{-1}(3)=a$, deducem că $f(a)=3$, deci $a^3+2a+3=3 \Longleftrightarrow a(a^2+2)=0 \Longleftrightarrow a=0$.

$(f^{-1}\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(f^{-1}(3))=f^{-1}(a)=f^{-1}(0)\overset{\text{not}}{=}b$. Deducem că $f(b)=0 \Longleftrightarrow b^3+2b+3=0 \Longleftrightarrow (b+1)(b^2-b+3)=0 \Longleftrightarrow b=-1$, deoarece $b^2-b+3=0$ nu are rădăcini reale. Astfel $(f^{-1}\circ f^{-1})(3)=-1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. În $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia: $\widehat{2}x+\widehat{3}=\widehat{1}$ se poate scrie sub forma $\widehat{2}x=-\widehat{2}=\widehat{4}$. Evaluând rezultatele pe care le obţinem la înmulţirea cu $\widehat{2}$, găsim rezultatele din tabelul:

$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{5}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$

Deducem că $x\in\left\{\widehat{2},\widehat{5}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. $A=\begin{pmatrix}-1 & a+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. $\det A=-a-3$. Trecând la determinant în relaţia dată, obţinem: $(a+3)^{2024}=1 \Longrightarrow a+3=\pm1 \Longrightarrow a\in\{-4,-2\}$.

Sau deducem relaţia (aplicând teorema Cayley Hamilton, sau prin calcul direct): $A^2+(-a-3)I_2=O_2 \Longleftrightarrow A^2=(a+3)I_2 \Longrightarrow A^{2024}=(A^2)^{1012}=((a+3)I_2)^{1012}=(a+3)^{1012}I_2$.

Impunând condiţia $A^{2024}=I_2 \Longrightarrow (a+3)^{1012}I_2=I_2 \Longrightarrow (a+3)^{1012}=1 \Longrightarrow a\in\{-4,-2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. Cum $a,b\in\mathbb{R}$, polinomul are coeficienţi reali. Cum $1+i\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, este rădăcină a polinomului $X^3+2X^2+bX+a \Longrightarrow 1-i$ este şi ea rădăcină. Astfel polinomul se divide cu $(X-1-i)(X-1+i)=X^2-2X+2$.

Efectuând împărţirea găsim restul $(b+6)X+a-8$, care trebuie să fie nul în caz de divizibilitate.

Astfel deducem $b=-6$, $a=8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă $\Longleftrightarrow \det(A)\neq 0$.

Găsim: $\det(A)=a^2-1$. Valorile lui $a\in\mathbb{R}$, pentru care $\det(A)=0$, sunt ± 1. Deci A este inversabilă $\Longleftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Integrala $\int\limits_0^1 \left(x^2+3x+1\right)e^x dx$ se calculează prin părţi. Atunci

$$\int\limits_0^1 \left(x^2+3x+1\right)\left(e^x\right)' dx=\left(x^2+3x+1\right)e^x\big|_0^1-\int\limits_0^1 (2x+3)\left(e^x\right)dx=$$

$$=5e-1-\int\limits_0^1 (2x+3)\left(e^x\right)' dx=5e-1-\left((2x+3)\,e^x\big|_0^1-\int\limits_0^1 2e^x dx\right)=$$

$=5e-1-(5e-3)+2\,(e-1)=2e$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. $$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+e^{2x}}{2x+e^{5x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}{e^{5x}\left(\frac{2x}{e^{5x}}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}{e^{3x}\left(\frac{2x}{e^{5x}}+1\right)}\right)=\ln\frac{1}{+\infty}=-\infty.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2}$. $f(1)=\dfrac{\operatorname{arctg} 1}{3}=\dfrac{\pi}{12}$.

Calculăm derivata $f'(x)=\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x^2+1}\left(x^2+2\right)-\operatorname{arctg} x\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Atunci $f'(0) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{12}$ şi astfel $f(1) + f'(0) = \dfrac{\pi + 6}{12}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Determinăm expresia lui $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} + x + 2}{x^{2n} + x^2 + 4}$.

Pentru $x \in [0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$, iar pentru $x > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty$. Astfel:

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4}$,pentru $x \in [0, 1)$, $f(1) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, iar pentru $x \in (1, +\infty)$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{x+2}{x^{2n}}}{1 + \frac{x^2+4}{x^{2n}}} = 1$.

Deci valoarea integralei este: $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4}dx + \int_1^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4}dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+4}dx + x \,|_1^3 = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right) |_0^1 +2 =$
$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} + \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + 2 = 2 + \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. $\displaystyle\int\limits_1^a (x-2)e^{-2x} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^a (x-2)\left(e^{-2x}\right)' dx =$

$= -\frac{1}{2}\left((x-2)\, e^{-2x} \,|_1^a - \displaystyle\int\limits_1^a \left(e^{-2x}\right) dx\right) = -\frac{(a-2)e^{-2a}+e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\displaystyle\int\limits_1^a \left(e^{-2x}\right) dx =$
$= -\frac{(a-2)e^{-2a}+e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} \,|_1^a = -\frac{(a-2)e^{-2a}+e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2a} + \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{(2a-5)e^{-2a}-e^{-2}}{4}$.

Astfel $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{(2a-5)\, e^{-2a} - e^{-2}}{4} = \frac{-e^{-2}}{4} = -\frac{1}{4e^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Ecuaţia tangentei în origine la graficul funcţiei f este: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Evident $f(0) = 0$. Calculăm derivata, $f'(x) = e^x(2x + \sin x) + e^x(2 + \cos x) = e^x(2x + \sin x + \cos x + 2)$. Deci $f'(0) = 3$.

Astfel ecuaţia tangentei în origine la graficul funcţiei f este: $y = 3x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 \sin\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \infty \cdot 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Astfel f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Studiem existenţa asimptotei oblice, a cărei ecuaţie este: $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 \sin \frac{1}{x^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 \left(\sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\cos \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^3}\right)}{\frac{-3}{x^4}} = \frac{2}{3} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\cos \frac{1}{x^2} + 1\right)}{\frac{1}{x}}$

$= \frac{2}{3} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x^2} \frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x^2}\right)}{-x} = \frac{4}{3} \frac{\sin 0}{\infty} = 0.$

Deci am obţinut $m = 1$, $n = 0$ şi astfel ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ este: $y = x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Avem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cos \frac{1}{x} = \infty \cdot 1 = \infty$, deoarece $\cos 0 = 1$.

Astfel f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Studiem existenţa asimptotei oblice, a cărei ecuaţie este: $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \cos \frac{1}{x} = 1.$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x \cos \frac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\cos \frac{1}{x} - 1\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \sin 0 = 0.$

Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei este: $y = x$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $\int\limits_1^2 (3x + a^2)dx \le 5 \Longleftrightarrow \frac{3x^2}{2} \Big|_1^2 + a^2 x \Big|_1^2 = 6 - \frac{3}{2} + a^2 \le 5 \Longleftrightarrow a^2 \le \frac{1}{2} \Longleftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 2}dt = F(x^2) - F(0)$, unde F este o primitivă a lui $g(t) = \sqrt{t^2 + 2}$.

Astfel $f'(x) = (F(x^2) - F(0))' = F'(x^2) \cdot 2x = \sqrt{(x^2)^2 + 2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^4 + 2}$.

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x\sqrt{x^4 + 2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Pe $(-\infty, 0]$ f este descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$ f este crescătoare, deci $x = 0$ este punct de minim local pentru f.

Astfel, mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_0^{x^2}\sqrt{t^2+2}dt$ este $\{0\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

24. $\int\limits_1^{x^2} f(x)\,dx = F(x^2)-F(1)$, unde F este o primitivă a lui f, adică o funcţie cu proprietatea $F'=f$; f fiind continuă admite primitive.

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int\limits_1^{x^2} f(x)\,dx = \lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{F'(x^2)-F'(1)}{1} = \lim_{x\to1} f(x^2)\cdot 2x = 2f(1).$$

Am aplicat regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$.

Din $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int\limits_1^{x^2} f(x)\,dx = 1 \Longrightarrow 2f(1)=1 \Longrightarrow f(1)=\frac{1}{2}$.

Astfel $f^2(1)+\frac{3}{2}f(1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Sunt prezentate două variante de rezolvare, prima fiind cea mai uşoară.

Varianta 1

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2+\sin^4 x}{x^4}$ se calculează aplicând formula $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, iar apoi formând limite de tipul $\lim\limits_{E(x)\to0}\frac{\sin E(x)}{E(x)}=1$.

Obţinem succesiv:

$$\lim_{x\to0}\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2+\sin^4 x}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{4(\sin\frac{x}{2})^4+\sin^4 x}{x^4} = 4\lim_{x\to0}\frac{(\sin\frac{x}{2})^4}{\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot16} + \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 = \frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}.$$

Varianta a doua este cea în care, după separare, se aplică regula lui l'Hospital pentru calculul primei limite, care nu se poate evalua direct.

Astfel avem:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2+\sin^4 x}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)\sin x}{4x^3} + \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 =$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{2x^3} + 1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x + (1-\cos x)\cos x}{6x^2} + 1 =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{6x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\cos x}{6x^2} + 1 =$
$+\frac{1}{6} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\cos x + (1-\cos x)\sin x}{12x} + 1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} + 1 = \dfrac{5}{4}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2-1)\, e^{x+1}$ este o funcţie continuă deci primitivabilă. Fie $F(x)$ o primitivă a lui $f \Longrightarrow \int\limits_1^x f(t)dt = F(x) - F(1)$.

Înlocuind în limita căutată şi aplicând regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$ obţinem:

$l = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}\int\limits_1^x f(t)dt = l = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F'(x)}{2(x-1)}$
$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2(x-1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)\, e^{x+1}}{(x-1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{(x-1)}e^2 =$
$= \dfrac{e^2}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{(x^2-1)}(x+1)\,.$

Folosind faptul că $\lim\limits_{E(x)\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} E(x)}{E(x)} = 1$, obţinem: $l = \dfrac{e^2}{2}\cdot 1\cdot 2 = e^2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Vectorii $\overrightarrow{u} = (m+5)\,\vec{i} + \vec{j}$ şi $c = (m-1)\,\vec{i} + \vec{j}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.

Astfel $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (m+5)(m-1) + 1 = 0 \Longrightarrow m^2 + 4m - 4 = 0$.

Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii daţi sunt ortogonali sunt rădăcinile, m_1, m_2, ale ecuaţiei precedente.

Astfel $m_1 + m_2 = -4, m_1 m_2 = -4$.

Se cere suma pătratelor lor, adică $m_1^2 + m_{2,}^2 = (m_1+m_2)^2 - 2m_1m_2 = (-4)^2 - 2(-4) = 16 + 8 = 24$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Se ştie că $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

Astfel ecuaţia devine:$\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Soluţia ecuaţiei $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ este $\sqrt{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29. $A(-1,2)$ $B(a,b)$şi $C(1,-3)$ sunt coliniare $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$ $0 \Longleftrightarrow -b+2-3a-b-3-2a=0 \Longleftrightarrow 5a+2b+1=0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. Aflăm, folosind teorema cosinusului, latura BC.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 25 + 16 - 40 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 41 - 20 = 21$. Astfel obţinem: $BC = \sqrt{21}$.

Aplicând teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, obţinem: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Longrightarrow \frac{\sqrt{21}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R \Longrightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 32

1. Cum x_1, x_2 sunt rădăcini ale ecuaţiei date avem: $x_1^2 - 4x_1 + 2 = 0$ şi $x_2^2 - 4x_2 + 2 = 0$.

Dacă înmulţim prima relaţie cu x_1 şi a doua cu x_2,iar apoi adunăm relaţiile obţinem:

$x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1 + x_2^3 - 4x_2^2 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow A = x_1^3 + x_2^3 = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 4\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\left(x_1 + x_2\right) =$

$= 4\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right) - 2\left(x_1 + x_2\right) = 4\left(x_1 + x_2\right)^2 - 8x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right).$

Cum $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = 2 \Longrightarrow A = 64 - 16 - 8 = 40.$

Se poate rezolva problema folosind formula: $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$,

$A = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = \left(x_1 + x_2\right)\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1x_2\right) = 4 \cdot (16 - 6) = 40,$

sau de la formula $\left(x_1 + x_2\right)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 \Longrightarrow$

$A = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^3 - \left(3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2\right) = \left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right) = 64 - 24 = 40.$

Se poate ajunge la rezultatul corect şi dacă se calculează efectiv rădăcinile ecuaţiei date: $2 \pm \sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

2. $$|z| = \left|\frac{3 + 2\sqrt{5}i}{2 - 5i}\right| = \frac{\left|3 + 2\sqrt{5}i\right|}{|2 - 5i|} = \frac{\sqrt{9 + 20}}{\sqrt{4 + 25}} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

3. Pentru ca dezvoltarea $\left(x^3 + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ să conţină termeni independenţi de x este nevoie ca în termenul general

$T_{k+1} = C_n^k \left(x^3\right)^{n-k} \left(\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}\right)^k$, puterea la care apare x să fie 0.

$T_{k+1} = C_n^k (4)^k (x)^{3(n-k) - \frac{k}{5}}$.

Deci trebuie să existe $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,astfel încât $3(n-k) - \frac{k}{5} = 0 \Longleftrightarrow 15n - 16k = 0 \Longleftrightarrow 15n = 16k \Longrightarrow 16$ divide $15n$.

Cum 15 şi 16 sunt prime între deducem că 16 divide n.

Astfel, pentru ca cele din enunţ să fie adevărate, n trebuie să fie multiplu de 16.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. $$T_{k+1} = C_{2024}^k \left(x^3\right)^{2024-k} \left(\frac{-6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^k = C_{2024}^k (-6)^k (x)^{3(2024-k) - \frac{3k}{5}}.$$

Dacă T_{k+1} îl conţine pe $x^6 \Longrightarrow 3(2024-k)-\frac{3k}{5}=6 \Longrightarrow 3\cdot 2024-\frac{18k}{5}=6 \Longrightarrow k=\frac{5}{18}(3\cdot 2024-6) \Longrightarrow$
$k=1685$.

Astfel, coeficientul termenului care îl conţine pe x^6 este: $C_{2024}^{1685}(-6)^{1685}=-C_{2024}^{1685}6^{1685}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Se cunoaşte formula: $R=\frac{abc}{4S}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului iar S este aria sa.

Calculând lungimile laturilor obţinem:

$a^2=BC^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}=9 \Longrightarrow a=3.$

$b^2=AC^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{36}{4}=9 \Longrightarrow b=3.$

$c^2=AB^2=\left(-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}=9 \Longrightarrow c=3.$

Astfel se observă că triunghiul este echilateral iar latura sa are lungimea $l=3$. Se ştie că raza cercului circumscris unui astfel de triunghi este $\frac{2}{3}$ din lungimea unei înălţimi a cărei valoare este $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Astfel găsim $R=\frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{l\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

Dacă nu observam acest lucru puteam continua cu evaluarea ariei triunghiului cu ajutorul determinantului format cu coordonatele punctelor.

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{vmatrix}\frac{1}{2}=S \Longrightarrow 2S=\frac{9\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{3^3}{9\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. $\displaystyle\int_0^t (3x-2)dx=3\frac{t^2}{2}-2t.$

Inecuaţia devine: $3\frac{t^2}{2}-2t\leq 4 \Longleftrightarrow 3t^2-4t-8\leq 0$.

O funcţie de gradul doi are semn contrar coeficientului pătratului între rădăcini.

Evaluând rădăcinile ecuaţiei ataşate găsim: $t_1,t_2=\frac{4\pm\sqrt{112}}{6}=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{3}$, astfel că soluţia inecuaţiei este: $t\in\left[\frac{2-2\sqrt{7}}{3},\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right]$.

Observăm apoi că $2<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}<3 \Longleftrightarrow 4<\sqrt{28}<7$, care este adevărată şi că $-2<\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<-1 \Longleftrightarrow -8<-\sqrt{28}<-5$, care este adevărată.

Deci mulţimea numerelor întregi t pentru care $\int\limits_0^t (3x-2)dx \leq 4$ este: $\{-1,0,1,2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \sin 3t dt = -\frac{1}{3}\cos 3t \,|_0^{x^2} = -\frac{1}{3}\cos 3x^2 + \frac{1}{3}$,

$g(x) = \int\limits_0^{x} t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \,|_0^{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 6 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}\cos 3x^2 + \frac{1}{3}}{\frac{x^{n+1}}{n+1}} = 6 \Longleftrightarrow$

$(n+1)\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos 3x^2 + 1}{x^{n+1}} = 18 \Longleftrightarrow (n+1)\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3x^2}{2}}{x^{n+1}} = 18.$

Deci $(n+1)\lim\limits_{x\to o} \frac{\sin^2\frac{3x^2}{2}}{x^{n+1}} = 9$. $(*)$

Pentru ca $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{3x^2}{2}}{x^{n+1}}$ să fie în primul rând finită este necesar să o punem sub forma $\lim\limits_{E(x)\to 0} \frac{\sin E(x)}{E(x)}$ pentru a ne folosi de faptul că ea este egală cu 1. Astfel avem:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sin\frac{3x^2}{2}\right)^2}{\frac{4}{9}\left(\frac{3x^2}{2}\right)^2 x^{n-3}} \underset{n=3}{=} \frac{9}{4}\cdot 1 = \frac{9}{4}$. Într-adevăr $(*)$ este îndeplinită.

Deci $n=3$.

Se poate rezolva problema şi observând că avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, iar f, g sunt derivabile.

Astfel calculăm limita aplicând regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^{x^2}\sin 3t dt\right)'}{\left(\int\limits_0^{x} t^n dt\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x^2)\, 2x}{x^n} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x^2)}{x^{n-1}} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^{n-1}} = 2 \cdot 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{3x^{n-1}}.$$

Această limită este finită şi nenulă doar dacă $n - 1 = 2 \Longrightarrow n = 3$. Obţinem într-adevar, în acest caz, valoarea 6 pentru limită.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $\int\limits_0^1 \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} \text{arctg } x dx$ este o integrală care se poate calcula folosind integrarea prin părţi.

$$\int\limits_0^1 \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} \text{arctg } x dx = a \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \text{arctg } x dx = a(\sqrt{1+x^2}\text{arctg } x \mid_0^1$$

$$- \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,(\text{arctg } x)'\, dx) = a(\sqrt{2}\text{arctg } (1) - \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx) =$$

$$= a(\sqrt{2}\tfrac{\pi}{4} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \mid_0^1) = a(\sqrt{2}\tfrac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2}))$$

Astfel $a(\sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2})) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \Longrightarrow a = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2})} = \frac{2\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2})\right)}{\sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \ln(1+\sqrt{2})} = 2.$

Mulţimea valorilor reale ale lui a pentru care $\int\limits_0^1 \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} \text{arctg } x dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ este: $\{2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. Aranjăm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+2n}{n\sqrt{3n^2+k^2}}$ ca pe o limită a unei sume Riemann, împărţind numărătorul şi numitorul cu n. Astfel putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2n}{n\sqrt{3n^2+k^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}+2}{\sqrt{3n^2+k^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\frac{k}{n}+2}{\sqrt{3+\frac{k^2}{n^2}}}.$$

Astfel avem de calculat limita unui şir de sume Riemann. Fiecare sumă este ataşată funcţiei: $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{3+x^2}}$, corespunde unei diviziuni echidistante, cu norma $\frac{1}{n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, şi unui sistem de puncte intermediare de forma $\frac{k}{n}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Funcţia f este continuă deci integrabilă, astfel că există limita şirului menţionat şi avem relaţia:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{k}{n}+2}{\sqrt{3+\frac{k^2}{n^2}}}=\int_0^1\frac{x+2}{\sqrt{3+x^2}}dx=\sqrt{3+x^2}\ |_0^1+2\ln(x+\sqrt{3+x^2})\ |_0^1$$

$=2-\sqrt{3}+2\left(\ln 3-\ln\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}+\ln 3.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Asimptota oblică spre $+\infty$ are forma generală:

$y=mx+n$, cu $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$.

Pentru ca asimptota oblică să fie dreapta $y=x,\Longrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$.

Avem:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{ax^3+bx^2+2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{a+\frac{b}{x}+\frac{2}{x^3}}}{x}=\sqrt[3]{a}$, adică $\sqrt[3]{a}=1\Longleftrightarrow$ $a=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+bx^2+2}-x)=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+bx^2+2}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+bx^2+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+bx^2+2}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+2}{\sqrt[3]{(x^3+bx^2+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+bx^2+2}+x^2}=\frac{b}{3}.$$

Deci $\frac{b}{3}=0\Longleftrightarrow b=0$.

Perechea de numere reale (a,b) pentru care ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2+2}$este $y=x$ este: $(1,0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$ este o funcţie continuă, derivabilă pe $\mathbb{R}$, pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. Astfel:

$\lim\limits_{x\to\infty}x(2\mathrm{arctg}f(x)-\pi)=\infty\cdot(2\mathrm{arctg}\,(+\infty)-\pi)=\infty\cdot\left(2\frac{\pi}{2}-\pi\right)=\infty\cdot 0$, adică o nedeterminare.

Eliminăm această nedeterminare aplicând regula lui l'Hospital, după ce o aducem la forma $\frac{0}{0}$.

Avem: $\lim\limits_{x\to\infty}x(2\mathrm{arctg}f(x)-\pi)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2\mathrm{arctg}f(x)-\pi)}{\frac{1}{x}}=$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+f^2(x)}f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+x+4}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2+x+4}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}=-2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{2x^n}{x^n+1}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{2\left(x^n+1-1\right)}{x^n+1}dx =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 2dx - \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{2}{x^n+1}dx =$

$= 4 - 2\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{1}{x^n+1}dx.$ (*)

Avem următoarele inegalităţi evidente, pentru $n > 1$:

$0 \leq \int_1^3 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \int_1^3 x^{-n}dx = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}\ |_1^3 = \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1\right)$

Trecem la limită în inegalităţile de mai sus cu $n \longrightarrow +\infty$ şi obţinem:

$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1\right) = 0.$

Utilizând criteriul cleştelui deducem că:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{1}{x^n+1}dx = 0.$

Revenind în relaţia (*) $\Longrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{2x^n}{x^n+1}dx = 4 - 2\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{1}{x^n+1}dx = 4 - 0 = 4.$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^3 \frac{2x^n}{x^n+1}dx = 4.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

13. Vom calcula integrala prin părţi. Avem:

$\int_0^1 \left(1-x^3\right)^n dx = \int_0^1 (x)'\left(1-x^3\right)^n dx =$

$= x\left(1-x^3\right)^n\ |_0^1 - \int_0^1 x\left(\left(1-x^3\right)^n\right)' dx =$

$= -\int_0^1 xn\left(1-x^3\right)^{n-1}\left(-3x^2\right)dx = 3n\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{n-1}dx =$

$= 3n\int_0^1 \left(x^3-1+1\right)\left(1-x^3\right)^{n-1}dx.$

Deci $I_n = 3n\int_0^1 \left(x^3-1\right)\left(1-x^3\right)^{n-1}dx + 3n\int_0^1 \left(1-x^3\right)^{n-1}dx = -3nI_n + 3nI_{n-1}.$

Astfel avem relaţia:

$I_n = -3nI_n + 3nI_{n-1} \Longleftrightarrow (1+3n)\,I_n = 3nI_{n-1} \Longleftrightarrow I_n = \frac{3n}{1+3n}I_{n-1}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. Vom calcula integrala: $\int\limits_a^{a+1}(x^2+2x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_a^{a+1} =$
$\frac{(a+1)^3}{3}+(a+1)^2+a+1-\left(\frac{a^3}{3}+a^2+a\right) = a^2+3a+\frac{7}{3}.$

Ecuaţia din enunţ devine: $a^2+3a+\frac{7}{3}=\frac{1}{3} \Longrightarrow a^2+3a+2=0$, cu rădăcinile $a_1=-1, a_2=-2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

15. Ţinînd cont de variaţia fncţiei $\sin x$ pe intervalul $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ şi deci de semnul expresiei $\frac{1}{2}-\sin x$ putem explicita modulul.

Cum $\left|\frac{1}{2}-\sin x\right| = \frac{1}{2}-\sin x, x \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$ si $\left|\frac{1}{2}-\sin x\right| = -\frac{1}{2}+\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ obţinem:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{1}{2}+\sin x\right)dx + \int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx \Longrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \cos x\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

Astfel $I = \frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}-1-\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)$

$I = \frac{\pi}{12}-1+2\cos\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{12}-1+4\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}-1+4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12}-1+2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Dacă $\int\limits_0^4 f(x)dx = 6$ şi $\int\limits_2^4 f(x)dx = -2$, atunci putem scrie, folosind aditivitatea integralei definite în raport cu intervalul de integrare:

$$\int\limits_0^4 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx + \int\limits_2^4 f(x)dx \Longrightarrow 6 = \int\limits_0^2 f(x)dx - 2 \Longrightarrow \int\limits_0^2 f(x)dx = 8.$$

Deci $I = \int\limits_0^2 \left[2f(x)+f(2x)\right]dx = 2\int\limits_0^2 f(x)dx + \int\limits_0^2 f(2x)dx = 16 + \int\limits_0^4 f(u)\frac{du}{2} = 16+\frac{6}{2} = 19.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x+2}{x^2+1}dx = \left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\text{arctg } x\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 2 + 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. $I = \int\limits_{-2}^{2} \min\left\{1, x, x^2\right\} dx$ este:

$\min\{1, x, x^2\} = x$,dacă $x \in [-2, 0]$ (restul sunt cantităţi pozitive).
$\min\{1, x, x^2\} = x^2$,dacă $x \in [0, 1]$ $(x^2 \le x \le 1)$.
$\min\{1, x, x^2\} = 1$,dacă $x \in [1, 2]$ $(1 \le x \le x^2)$.
Astfel obţinem:

$$I = \int\limits_{-2}^{2} \min\left\{1, x, x^2\right\} dx = \int\limits_{-2}^{0} xdx + \int\limits_{0}^{1} x^2dx + \int\limits_{1}^{2} dx =$$

$$= \tfrac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \tfrac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} + x\Big|_{1}^{2} = -\tfrac{2}{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. Dacă $A(1, -1)$ este situat pe dreapta $x + 3ay - b = 0 \Longrightarrow 1 - 3a - b = 0$.

Dacă $B(2, 1)$ este situat pe dreapta $x+3ay-b = 0 \Longrightarrow 2+3a-b = 0$.

Rezolvând sistemul găsim: $3 - 2b = 0 \Longrightarrow b = \frac{3}{2}, a = -\frac{1}{6} \Longrightarrow b - a = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

Valoarea lui $b - a$ este $\frac{5}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. Nu putem determina elementele simetrizabile dacă nu aflăm mai întâi elementul neutru.

Legea admite element neutru $\Longleftrightarrow \exists e \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x{*}e = e{*}x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Legea este în mod evident comutativă, adică prima egalitate din relaţia precedentă este adevărată.

Considerăm $x{*}e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow xe - 4x - 3e + 12 = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x\,(e-4) = -12 + 3e, \forall x \in \mathbb{Z}$
$\Longrightarrow e = 4 \in \mathbb{Z}$, deoarece în caz contrar relaţia ar fi satisfăcută doar de o singură valoare a lui $x \in \mathbb{Z}$.

Evident $e = 4 \Longrightarrow 0 = 0$, relaţie adevărată pentru orice număr întreg.

Determinăm elementele simetrizabile.

$x \in \mathbb{Z}$ este simetrizabil dacă $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x*x' = x'*x = e = 4$.

$x * x' = xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Longleftrightarrow x'(x-3) - 3(x-3) = 1 \Longleftrightarrow (x'-3)(x-3) = 1 \Longleftrightarrow x' = 3 + \frac{1}{x-3},\ x \neq 3$.

Observăm că elementele simetrizabile se determină din condiţia:

$x' \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{1}{x-3} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Longleftrightarrow x \in \{4, 2\}$.

Produsul elementelor simetrizabile faţă de această lege este 8.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. Notăm $\arcsin \frac{4}{5} = a$.

Avem de aflat valoarea lui $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

Evident $\sin a = \sin(\arcsin \frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$,iar $\cos a = \cos(\arcsin \frac{4}{5}) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Astfel $\sin(2a) = 2\frac{4}{5}\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

Valoarea lui $\sin(2 \arcsin \frac{4}{5})$ este $\frac{24}{25}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Avem: $d = \det A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Adunând toate coloanele la prima obţtinem: $d = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2 + x_3 + x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3 + x_1 + x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

x_1, x_2, x_3 fiind soluţiile ecuaţiei: $x^3 + 5x - 2 = 0$, verifică relaţia: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow d = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_1 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$.

Se putea obţine rezultatul corect şi prin calcul direct. Astfel avem: $d = \det(A) = 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3$.

x_1, x_2, x_3 fiind soluţiile ecuaţiei: $x^3 + 5x - 2 = 0$, verifică relaţiile: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$, $x_1x_2x_3 = 2$.

Mai ştim şi că $x_1^3 + 5x_1 - 2 = 0, x_2^3 + 5x_2 - 2 = 0, x_3^3 + 5x_3 - 2 = 0$.

Adunând ultimele 3 relaţii deducem că $x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 = 6 - 5(x_1 + x_2 + x_3) = 6$. Astfel $d = 6 - 6 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. Pentru dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{7} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2024}$ expresia termenului general este:

$T_{k+1} = C_{2024}^{k} \left(\sqrt[3]{7}\right)^{2024-k} \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{k} = C_{2024}^{k} \left(7\right)^{\frac{2024-k}{3} - \frac{k}{2}}$.

C_{2024}^{k} este număr natural indiferent de valaorea lui $k \in \{0, ..., 2024\}$.
Pentru ca T_{k+1} să fie raţional $\Longrightarrow (7)^{\frac{2024-k}{3}-\frac{k}{2}} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \frac{2024-k}{3} - \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$.
$\frac{2024-k}{3} - \frac{k}{2} = \frac{2022-k+2}{3} - \frac{k}{2} = 674 - \frac{k-2}{3} - \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{k-2}{3} + \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$
$\frac{5k-4}{6} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 5k - 4 = 6p, p \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow k = \frac{6p+4}{5} = p + \frac{p+4}{5} \in \{0, ...2024\}$.
Astfel deducem că $p = 5l - 4$, $l \in \mathbb{Z}$, deci $k = 5l - 4 + l = 6l - 4$.
Dar $0 \leq 6l - 4 \leq 2024 \Longleftrightarrow \frac{4}{6} \leq l \leq \frac{2028}{6} \Longleftrightarrow l \in \{1, .., 338\}$. Astfel există deci 338 valori pe care le poate lua l, deci implicit şi k.
Numărul termenilor raţionali este 338.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $S = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + 2024i^{2024} \Longrightarrow iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \cdots + 2024i^{2025}$.
Astfel $S - iS = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \cdots + i^{2024} - 2024i^{2025} = i\frac{1-i^{2024}}{1-i} - 2024\left(i^4\right)^{506} i = i \cdot \frac{1-\left(i^4\right)^{506}}{1-i} - 2024i = -2024i$.
Astfel $S(1 - i) = -2024i \Longrightarrow S = \frac{-2024i}{1-i} = 1012 - 1012i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Ecuaţia $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$ se poate scrie sub forma:

$5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 = 0 \Longleftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$,unde am notat $5^x = t > 0$.
Rezolvând ecuaţia de gradul doi obţinută găsim: $t_1 = 2, t_2 = 3$.
Astfel, întorcându-ne la substituţia făcută obţinem:
$5^x = 2 \Longrightarrow x_1 = \log_5 2$, $5^x = 3 \Longrightarrow x_2 = \log_5 3$.
Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei va fi: $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

26. Soluţia reală a ecuaţiei $\log_2 (2 \log_4 (\log_6 x)) = 0$ este:

$\log_2 (2 \log_4 (\log_6 x)) = 0 \Longrightarrow \log_2 (2 \log_4 (\log_6 x)) = \log_2 1 \Longrightarrow$
$2 \log_4 (\log_6 x) = 1$ (din injectivitatea funcţiei logaritm).
$2 \log_4 (\log_6 x) = 1 \Longrightarrow \log_4 (\log_6 x) = \frac{1}{2} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2 \Longrightarrow \log_6 x = 2 \Longrightarrow x = 6^2$.
Evident 6^2 respectă condiţiile ca toţi logaritmii care apar să existe.
Astfel obţinem suma dintre soluţie şi triplul inversei acesteia ca fiind: $6^2 + 3 \cdot \frac{1}{6^2} = 36 + \frac{1}{12} = \frac{433}{12}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Observăm că sunt îndeplinite condiţiile de existenţă a logaritmilor, deoarece exponenţialele iau doar valori pozitive.
$\log_2 (16^x + 11) = 2 + \log_2 (4^x + 2) \Longleftrightarrow \log_2 (16^x + 11) = \log_2 4 (4^x + 2)$

$\Longleftrightarrow 16^x + 11 = 4\left(4^x + 2\right) \Longleftrightarrow 4^{2x} - 4 \cdot 4^x + 3 = 0$
$\Longleftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$,unde am notat $4^x = t > 0$.
Rezolvând ecuaţia de gradul doi obţinută găsim: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.
Astfel, întorcându-ne la substituţia făcută obţinem:
$4^x = 1 \Longrightarrow x_1 = \log_4 1 = 0$, $4^x = 3 \Longrightarrow x_2 = \log_4 3 = \log_2 \sqrt{3}$.
Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_2\left(16^x + 11\right) = 2 + \log_2\left(4^x + 2\right)$ este: $\left\{0, \log_2 \sqrt{3}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este inversabilă $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.
$\det(A) = -a^2 - 6 + 3a - 6a = -a^2 - 3a - 6$.
Aflăm valorile care îl anulează $-a^2 - 3a - 6 = 0 \Longleftrightarrow a^2 + 3a + 6 = 0$.
Cum $\Delta < 0$, nu există valori reale care să ducă la $\det(A) = 0$.
Altfel spus, pentru orice $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \det(A) \neq 0$, adică A este inversabilă.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

29. Un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute are cel puţin două soluţii reale dacă şi numai dacă este compatibil nedeterminat, adică admite o infinitate de soluţii. Acest lucru se realizează dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse şi este ≤ 2 (dacă $\det(A) \neq 0$, sistemul are solutie unică).

Pentru sistemul dat: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + y - az = b \\ 2x + y - 3z = 2 + b \end{cases}$,

avem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ iar $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & b \\ 2 & 1 & -3 & 2+b \end{pmatrix}$.

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{rang}(A) \geq 2$.
Pentru ca sistemul să nu aibă soluţie unică impunem ca $\det(A) = 0$.

Astfel, deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4a - 1 - 2 + a - 6 = -3a - 12 \Longrightarrow$ $\det A = 0 \Longleftrightarrow a = -4$.

Impunem acum conditia ca $\text{rang}(\overline{A}) = 2$. Astfel, toţi minorii caracteristici trebuie să fie nuli.

Avem un singur minor caracteristic, deci obţinem:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 2+b \end{vmatrix} = 2+b+4b-1-2-b+2(2+b)=0 \Longleftrightarrow 6b+3=$ $0 \Longleftrightarrow b=-\frac{1}{2}$.

Astfel, pentru ca sistemul să admită cel puţin două soluţii reale trebuie ca $a=-4$ şi $b=-\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

30. Scăzând din cea de a doua ecuaţie prima ecuaţie deducem că $\widehat{2}y=-\widehat{3} \Longleftrightarrow \widehat{2}y=\widehat{4}$.

Cum $\widehat{2}$este inversabil în inelul dat (este unitate a inelului, adică simetrizabil în raport cu înmutirea modulo 7), $2,7$ fiind prime între ele, există o unică soluţie a ecuaţiei precedente. $y=\left(\widehat{2}\right)^{-1}\widehat{4}$, unde $\left(\widehat{2}\right)^{-1}=\widehat{4}$, este simetricul lui $\widehat{2}$ faţă de înmulţire. Astfel $y=\widehat{4}\cdot\widehat{4}=\widehat{2}$.

Înlocuind y în prima ecuaţie obţinem: $\widehat{2}x+\widehat{6}=\widehat{4} \Longleftrightarrow \widehat{2}x=-\widehat{2}=\widehat{5} \Longleftrightarrow x=\left(\widehat{2}\right)^{-1}\widehat{5} \Longleftrightarrow x=\widehat{4}\cdot\widehat{5}=\widehat{6}$.

Sistemul admite o singură soluţie: $\left(\widehat{6},\widehat{2}\right) \Longrightarrow$ suma cerută este: $\widehat{6}+\widehat{2}=\widehat{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 33

1. $\sin(\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{4}{5}) = \sin\frac{\pi}{6}\cos(\arcsin\frac{4}{5}) - \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos\frac{\pi}{6} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{16}{25}} - \frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Determinând pantele celor două drepte, dr_1, dr_2, observăm că ele sunt egale. $dr_1 = \frac{3}{4} = dr_2$.

Deci dreptele sunt paralele. Distanţa dintre ele se determină alegând un punct pe una dintre ele, de exemplu pe prima, şi calculând distanţa de la el la cea de a doua dreaptă.

Astfel alegem $A(-1, 505)$ pe prima dreaptă.

$d(A, dr_2) = \frac{|-3-2020+a|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2023+a|}{5} = 1 \iff |a - 2023| = 5 \iff a - 2023 = \pm 5 \iff a = 2028,\ a = 2018.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Polinomul $P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + mX + n$ având coeficienţi reali dacă admite rădăcina complexă $2 - i$ atunci admite şi rădăcina $2 + i$.

Astfel $P(X)$ este divizibil cu $(X - 2 + i)(X - 2 - i) = X^2 - 4X + 5$.

Efectuând algoritmul împărtirii polinoamelor găsim restul: $R(X) = (m + 14)\,X + n - 30$.

Cum restul trebuie să fie polinomul nul în caz de divizibilitate, obţinem: $m = -14$, $n = 30$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. Cum ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$, are rădăcinile x_1, x_2, x_3, putem scrie: $x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0$, $x_2^3 - 4x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$, $x_3^3 - 4x_3^2 + 2x_3 - 1 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) - 3 = 0$.

Astfel: $A = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 =$
$= 4(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 8(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3$.

Scriind relaţiile lui Viète obţinem: $x_1+x_2+x_3 = 4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 2$.

Obţinem: $A = 64 - 16 - 8 + 3 = 43$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. $z = \dfrac{-3 + \sqrt{5}i}{2 - \sqrt{5}i} = \dfrac{\left(-3 + \sqrt{5}i\right)\left(2 + \sqrt{5}i\right)}{\left(2 - \sqrt{5}i\right)\left(2 + \sqrt{5}i\right)} = \dfrac{-11 - \sqrt{5}i}{9}$.

Astfel partea reală a lui z este $-\frac{11}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. $\widehat{2}x + \widehat{3} = \widehat{6} \iff \widehat{2}x = \widehat{3}$.

Rezultatele care pot să apară la înmulţirea cu $\widehat{2}$ se pot vedea în tabelul următor:

$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{5}$	$\widehat{6}$	$\widehat{7}$	$\widehat{8}$	$\widehat{9}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$	$\widehat{6}$	$\widehat{8}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$	$\widehat{6}$	$\widehat{8}$

Se observă că nu există elemente care înmultite cu $\widehat{2}$ să conducă la $\widehat{3}$. Astfel $p = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Mediana ce pleacă din vârful C uneşte acest vârf cu mijlocul segmentului AB, notat cu M.

$A(4,-1)$ si $B(2,-3) \Longrightarrow M(\frac{4+2}{2}, \frac{-1-3}{2}) \Longrightarrow M(3,-2)$.

Se ştie că $C(1,-4) \Longrightarrow$dreapta CM are ecuaţia:

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+4}{-2+4} \Longleftrightarrow x-1 = y+4 \Longleftrightarrow x-y-5 = 0$.

Ecuaţia medianei ce pleacă din vârful C este: $x-y-5=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $|z| + 5z = 2 + 10i$.

Fie $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Introducând z în relaţia $|z| + 5z = 2 + 10i$, obţinem:$\sqrt{x^2+y^2} + 5(x+iy) = 2 + 10i$.

$5y = 10 \Longrightarrow y = 2$.

$\sqrt{x^2+y^2} + 5x = 2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+4} + 5x = 2 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+4} = 2-5x$.

Evident $2 - 5x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{2}{5}$. Căutăm solutii în $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right]$.

După ce ne-am asigurat că termenii ecuaţiei iraţionale sunt pozitivi, putem ridica relaţia la pătrat.

Obţinem:

$x^2 + 4 = (2-5x)^2 \Longleftrightarrow x^2 + 4 = 4 - 20x + 25x^2 \Longleftrightarrow -20x + 24x^2 = 0 \Longleftrightarrow 4x(6x-5) = 0$.

Cele două soluţii sunt: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{6}$.

Însă nu ambele se găsesc în intervalul în care căutăm soluţia ($0 \leq \frac{2}{5}$, dar $\frac{5}{6} > \frac{2}{5}$).

Astfel, există doar o singură valoare care convine, $x = 0$, deci $z = 2i$, iar partea sa reală este 0.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. Condiţiile de existenţă a logaritmilor conduc la

$\frac{3x^2-2x}{x^2+1} > 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 2x > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$,

$\frac{3x^2+5x}{x^2+2} > 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 5x > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (0, +\infty)$.

Astfel căutăm soluţii în $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) = D$.

Ţinând cont că baza logaritmului este subunitară şi că, în acest caz, el este o funcţie descrescătoare, obţinem:

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x^2-2x}{x^2+1} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x^2+5x}{x^2+2} \Longleftrightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+1} > \frac{3x^2+5x}{x^2+2} \Longleftrightarrow (3x^2-2x)(x^2+2) > (3x^2+5x)(x^2+1) \Longleftrightarrow x(7x^2-3x+9) < 0$. Cum $7x^2-3x+9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, obţinem $x < 0$.

Astfel soluţia este: $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. $S = \frac{3}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{3}{3\cdot 5} + \ldots \frac{3}{2022\cdot 2024} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \ldots \frac{2}{2022\cdot 2024}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{4-2}{2\cdot 4} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \ldots \frac{2024-2022}{2022\cdot 2024}\right) =$
$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{2022} - \frac{1}{2024}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{4047}{2023\cdot 2024}\right) = \frac{9}{4} - \frac{4047\cdot 3}{2023\cdot 2024\cdot 2}$.

Partea întreagă a lui S este 2.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. Ştiind că $B = \frac{\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow A = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} = \frac{6\pi+\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$.
Aplicând teorema sinusurilor putem scrie:
$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Longrightarrow \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12})} = 2R \Longrightarrow \dfrac{1+\sqrt{3}}{\cos(\frac{\pi}{12})} = 2R.$
Se ştie: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Dar $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$,deci $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.
Astfel $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow$
$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
Deducem că $2R = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} \Longrightarrow R = \sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $x^2 + 2mx + 5 = 0$ are amble soluţii în intervalul $(2, +\infty)$ conduce la $x_1 > 2$, $x_2 > 2$.

Făcând schimbarea de variabilă $y = x - 2$, obţinem o ecuaţie în y care tebuie să aibă ambele rădăcini strict pozitive.

$x = y + 2 \Longrightarrow y^2 + (4+2m)y + 4m + 9 = 0$.

Condiţiile ce trebuie puse pentru ca rădăcinile ei să fie strict pozitive sunt:

$\Delta \geq 0; S > 0; P > 0$.
$\Delta = (4+2m)^2 - 4(4m+9) = 4(4+4m+m^2-4m-9) = 4(m^2-5)$.
$\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow m \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$.
$S > 0 \Longleftrightarrow -(4+2m) > 0 \Longleftrightarrow m < -2$.
$P > 0 \Longleftrightarrow 4m + 9 > 0 \Longleftrightarrow m > -\frac{9}{4}$.
Deducem deci că $m \in \left(-\frac{9}{4}, -\sqrt{5}\right]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. $T_{k+1} = C_{20}^{k}\left(xy^3\right)^{20-k}\left(\dfrac{-6}{\sqrt[3]{xy}}\right)^{k} = C_{20}^{k}\left(-6\right)^{k}x^{20-k-\frac{k}{3}}y^{3(20-k)-k}.$

Astfel, după egalarea puterilor găsim: $3(20-k)-k = 20-k-\frac{k}{3} \Longleftrightarrow k = 15 \Longrightarrow T_{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. Se observă că d este un determinant Vandermonde, deci $d = (x_3 - x_2)\left(x_3 - x_1\right)\left(x_2 - x_1\right)$. Se poate deduce expresia şi prin calcul direct.

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei $x^3 + 5x + 6$, avem: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_3x_1 + x_2x_3 = 5$, $x_1x_2x_3 = -6$.

Astfel $x_3 = -(x_1 + x_2)$ şi $d = (x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2)\left(x_2 - x_1\right) = \left(2\left(x_1 + x_2\right)^2 + x_1x_2\right)\left(x_2 - x_1\right) \Longrightarrow d^2 = \left(2\left(x_1 + x_2\right)^2 + x_1x_2\right)^2\left(x_2 - x_1\right)^2$.

$d^2 = \left(2\left(x_1 + x_2\right)^2 + x_1x_2\right)^2\left(\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_1x_2\right)$.

Notăm $x_1 + x_2 = S$, $x_1x_2 = P \Longrightarrow d^2 = \left(2S^2 + P\right)^2\left(S^2 - 4P\right)$.

Prelucrând ultimele două relaţii ce leagă rădăcinile ecuaţiei de coeficienţii ei obţinem:

$P - S^2 = 5$, $-PS = -6 \Longrightarrow P = \frac{6}{S} \Longrightarrow S^3 + 5S - 6 = 0 \Longleftrightarrow (S-1)\left(S^2 + S + 6\right) = 0$.

Cum o ecuaţie de gradul trei are trei rădăcini reale, sau una reală şi două complexe conjugate, deducem că $S \in \mathbb{R}$, deci $S = 1 \Longrightarrow P = 6$.

Astfel $d^2 = (2+6)^2(1-24) = -1472$.

Problema se poate rezolva şi dacă se porneşte de la aflarea rădăcinilor ecuaţiei: $x^3 + 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow$

$(x+1)(x^2 - x + 6) = 0 \Longleftrightarrow x_1,\ x_2,\ x_3 \in \left\{-1, \frac{1+i\sqrt{23}}{2}, \frac{1-i\sqrt{23}}{2}\right\}$.

Trebuie să ţinem cont de faptul că alegerea valorilor pentru necunoscute influenţează semnul determinantului, deci determinantul poate lua două valori egale în modul, dar de semne diferite. Cum se cere valoarea lui d^2 calculăm o singură valoare, făcând o alegere arbitrară a rădăcinilor.

Astfel putem considera $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1+i\sqrt{23}}{2}$, $x_3 = \frac{1-i\sqrt{23}}{2}$.

Efectuând calculul determinantului găsim: $d = -8i\sqrt{23} \Longrightarrow d^2 = -1472$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

15. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Avem: $\mathrm{Tr}(A) = 3$, $\det(A) = -10$.

Teorema Cayley-Hamilton afirmă că: $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2 \Longrightarrow A^2 - 3A - 10I_2 = O_2$. Înmulţim cu $A^{-1} \Longrightarrow A - 3I_2 - 10A^{-1} = O_2$.

Se poate rezolva problema si calculând efectiv inversa, după care se observă ce relaţie verifică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

16. $x*y = 3xy+3x+3y+2 = 3x(y+1)+3(y+1)-1 = 3(x+1)(y+1)-1.$

$x*y*z = (x*y)*z = 3(x*y+1)(z+1) - 1 = 3\cdot 3(x+1)(y+1)(z+1) - 1.$

$x*y*z = 8 \Longleftrightarrow 9(x+1)(y+1)(z+1) - 1 = 8 \Longleftrightarrow$

$(x+1)(y+1)(z+1) = 1.$

Putem avea următoarele variante:

$(x+1) = 1 = (y+1) = (z+1) \Longleftrightarrow x = y = z = 0 \Longrightarrow (0,0,0)\,.$

$(x+1) = 1, (y+1) = (z+1) = -1 \Longleftrightarrow x = 0, y = z = -2 \Longrightarrow (0,-2,-2)\,.$ Analog obţinem $(-2,0,-2)$ şi $(-2,-2,0)\,.$

Astfel obţinem 4 triplete ordonate cu proprietatea cerută.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

17. Fixăm pe prima poziţie un număr par. Avem 3 variante de alegere a acestuia (0 sau 2 sau 4).

Pentru fiecare din aceste alegeri rămân restul de 4 numere pe care le permutăm cum dorim, adică avem 4! variante de alegere. Aceste variante sunt distincte de cele pe care le obţinem când fixăm alt număr par pe prima poziţie.

Aplicând regula produsului obţinem $3\cdot 4! = 72$ de permutări.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\cdot(\operatorname{arctg} x)'\,dx = (\operatorname{arctg} x)^2 \,|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

$$\Longrightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x\right)^2\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)^2 - (\operatorname{arctg} 1)^2).$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{7\pi^2}{288}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2+2}$ admite $y=x+1$ asimptotă oblică spre $-\infty$, atunci $m=1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n=1=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(-y)}{-y}=-\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\sqrt[3]{-ay^3+by^2+2}}{y}=\sqrt[3]{a}=1\Longrightarrow a=1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+bx^2+2}-x)=\lim\limits_{y\to\infty}(\sqrt[3]{-y^3+by^2+2}+y)=\lim\limits_{y\to\infty}(y-\sqrt[3]{y^3-by^2-2})=$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{(y^3-(y^3-by^2-2))}{y^2+y\sqrt[3]{y^3-by^2-2}+\sqrt[3]{(y^3-by^2-2)^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{by^2+2}{y^2+y\sqrt[3]{y^3-by^2-2}+\sqrt[3]{(y^3-by^2-2)^2}}=\frac{b}{3}=1\Longrightarrow b=3.$

Astfel perechea căutată este $(1,3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Cum funcţia $f(x)\cos x=g(x)$ este continuă ea admite primitive. Fie $F(x)$ o primitivă a sa. Rezultă $\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(x)\cos x dx=F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})$.

Avem de calculat $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})\right)$.

$F(x)$ este continuă si derivabilă pe $\mathbb{R}$ deci satisface conditiile din teorema Lagrange pe $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$.

Atunci $\exists c_n\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ astfel încât: $\frac{F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=F'(c_n)$

$\Longrightarrow\frac{n}{2}\left(F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})\right)=F'(c_n)\Longrightarrow n\left(F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})\right)=2F'(c_n)=2g(c_n)$.

Astfel $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2\frac{\cos(c_n)}{1+e^{c_n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(c_n)}{1+e^{c_n}}$.

Folosind criteriul cleştelui deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

Astfel obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(F(\frac{1}{n})-F(-\frac{1}{n})\right)=2\lim\limits_{c_n\longrightarrow0}\frac{\cos(c_n)}{1+e^{c_n}}=2\frac{1}{2}=1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. $I=\int\limits_{-3}^{3}|x+2|\,e^{3x}dx=\int\limits_{-3}^{-2}(-x-2)\,e^{3x}dx+\int\limits_{-2}^{3}(x+2)\,e^{3x}dx.$

Calculând integralele prin părţi obţinem:

$$\int\limits_{-3}^{-2}(-x-2)\,e^{3x}dx=\left(-\frac{x+2}{3}e^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}\right)\Bigg|_{-3}^{-2}=-\frac{4}{9}e^{-9}+\frac{1}{9}e^{-6}.$$

$$\int_{-2}^{3}(x+2)\,e^{3x}dx=\left(\frac{x+2}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\frac{14}{9}e^{9}+\frac{1}{9}e^{-6}.$$

Astfel deducem că $I=\int\limits_{-3}^{-2}(-x-2)\,e^{3x}dx+\int\limits_{-2}^{3}(x+2)\,e^{3x}dx=-\frac{4}{9}e^{-9}+\frac{2}{9}e^{-6}+\frac{14}{9}e^{9}=\frac{14e^{9}+2e^{-6}-4e^{-9}}{9}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. Se aplică regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\text{arctg }x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\frac{1}{1+x^2})}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\frac{x^2}{1+x^2})}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4(1+x^2)}=0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. Primitiva F a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\,(x)=\ln(x^2+1)$ se calculează prin părţi. Avem:

$$F(x)=\int\ln(x^2+1)dx=\int(x)'\ln(x^2+1)dx=$$
$$=x\ln(x^2+1)-\int x\left(\ln(x^2+1)\right)'dx=$$
$$=x\ln(x^2+1)-\int x\frac{2x}{x^2+1}dx=x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$
$$=x\ln(x^2+1)-2\left(\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx\right)$$
$$=x\ln(x^2+1)-2\,(x-\text{arctg }x)+C=x\ln(x^2+1)-2x+2\text{arctg }x+C.$$

Se determină constanta C impunând condiţia $F(0)=1$. Obţinem: $F(0)=C=1$.

Deci, primitiva F a funcţiei f, ce satisface condiţia $F(0)=1$, este: $F(x)=x\ln(x^2+1)-2x+2\text{arctg }x+1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Cum funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\,(x)=\text{arctg}\frac{x^3+2}{1+2x^4}$ este continuă ea admite primitive. Fie $F(x)$ o primitivă a sa. Se ştie că $\int\limits_{x}^{x+3}f(t)dt=F(x+3)-F(x)$. $F(x)$ este continuă şi derivabilă pe domeniul ei de definiţie, deci satisface condiţiile din teorema Lagrange pe $[x,x+3]$.

Atunci $\exists c_x\in(x,x+3)$ astfel încât:

$\frac{F(x+3)-F(x)}{3}=F'(c_x)\Longrightarrow F(x+3)-F(x)=3F'(c_x)=3f(c_x).$

Astfel $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{x}^{x+3} f(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty} 3f(c_x) = 3\lim\limits_{x\to\infty} \text{arctg}\frac{c_x^3+2}{1+2c_x^4}$.

Folosind criteriul cleştelui deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} c_x = \infty$.

Astfel obţinem: $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{x}^{x+3} f(t)dt = 3\text{arctg}(\lim\limits_{c_x\to\infty}\frac{c_x^3+2}{1+2c_x^4}) = 3\text{arctg}\ 0 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

25. f este derivabilă dacă este mai întâi continuă. Pe $\mathbb{R}^*$ este în mod evident continuă. Pentru a fi continuă şi în 0 trebuie să impunem condiţia:

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = f(0)$. Ultima egalitate este evident adevărată, deci impunem ca $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = f(0) = b$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = 2+3 = 5$. Astfel deducem că $b=5$.

f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi are expresia $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+4}} + a, & x<0, \\ \frac{2x}{x^2+1}, & x>0. \end{cases}$

Impunem condiţia ca ea să fie derivabilă şi în 0: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x) = \frac{1}{4}+a, \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4}+a=0 \Longrightarrow a=-\frac{1}{4}$.

Deci, f este derivabilă pe $\mathbb{R} \Longleftrightarrow a=-\frac{1}{4},\ b=5$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. $f(x) = \frac{x+a}{e^{2x}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}-(x+a)2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(1-2a-2x)}{e^{4x}} \Longrightarrow$

$f''(x) = \left(\frac{1-2a-2x}{e^{2x}}\right)' = \dfrac{-2e^{2x}-(1-2a-2x)\,2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2} = \dfrac{-4+4a+4x}{e^{2x}}$.

Impunând conditia $f''(0)=8$, obţinem valoarea lui a.

$f''(0) = -4+4a = 8 \Longleftrightarrow 4a=12 \Longleftrightarrow a=3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^{ax^2}$, funcţie contiună şi deci primitivabilă pe $\mathbb{R}$. Fie $F(x)$ o primitivă a sa. Evident $F'(x) = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\int_0^{\frac{1}{x}} e^{at^2}dt = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(F\left(\frac{1}{x}\right)-F(0)\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$, o nedeterminare pe care o calculăm aplicând regula lui l'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(F\left(\frac{1}{x}\right)-F(0)\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1.$$

Astfel, limita nu depinde de valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ şi este egală cu 1.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+2)\ln(1+\frac{2}{2k+1})}{k+2} = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{2}{2k+1}) =$

$\displaystyle= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+\frac{2}{2k+1})\right) = \ln\left(\tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{7}{5}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2n+3}{2n+1}\right) = \ln(2n+3).$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\tfrac{f(k)}{k+2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\ln(2n+3))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln((\ln(2n+3))^{\frac{1}{n}})} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln((\ln(2n+3))^{\frac{1}{n}})}.$

Evaluăm $l = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln((\ln(2n+3))^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\ln(\ln(2n+3)) =$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\tfrac{\ln(\ln(2n+3))}{\ln(2n+3)}\tfrac{\ln(2n+3)}{2n+3}(2n+3) = \lim_{n\to\infty}\tfrac{2n+3}{n}\tfrac{\ln(\ln(2n+3))}{\ln(2n+3)}\tfrac{\ln(2n+3)}{2n+3}.$

Cum $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n} = 2$, iar $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, obţinem:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} = 0, \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(2n+3))}{\ln(2n+3)} = 0$, deci $l = 0$.

Astfel limita din enunţ este $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f(k)}{k+2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

29. $\displaystyle I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+4x+4-4x-4)}{(x+2)^2}dx =$

$\displaystyle= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+4x+4)-4x^{n+1}-4x^n}{(x+2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+2)^2}{(x+2)^2}dx - 4I_{n+1} -$

$\displaystyle 4I_n = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 - 4I_{n+1} - 4I_n.$ Astfel, $\displaystyle I_{n+2} + 4I_{n+1} + 4I_n = \frac{1}{n+1}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. Pentru a determina intervalele de monotonie ale lui f, calculăm derivata ei şi construim tabelul de variaţie.

$\displaystyle f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$

$\displaystyle f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \sqrt{e}.$

Evident dacă $x < \sqrt{e} \Longrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2}$; $x > \sqrt{e} \Longrightarrow \ln x > \dfrac{1}{2}$.

Realizăm tabelul de variaţie corespunzător lui f.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\sqrt{e})$	$\searrow$	

Astfel, f este strict crescătoare pe $(0, \sqrt{e}]$ şi strict descrescătoare pe $[\sqrt{e}, +\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 34

1. $E = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{-3} =$

$= \dfrac{-2\sqrt{2}}{3} = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}$. Cum $0 < \dfrac{\sqrt{8}}{3} < 1 \Longrightarrow 0 > -\dfrac{\sqrt{8}}{3} > -1 \Longrightarrow [E] = -1$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $\sqrt{3x-5} \geq 1 - x$.

Condiţii de existenţă: $3x - 5 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$.

Observăm că din $x \geq \dfrac{5}{3} \Longrightarrow x > 1 \Longrightarrow 1 - x < 0$.

Astfel, termenul din membrul stâng este negativ şi deci este mai mic decât un radical, care este o cantitate pozitivă.

Astfel soluţia inecuaţiei coincide cu mulţimea de existenţă a radicalului, adică $\left[\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ se calculează folosind schimbarea de variabilă $\text{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \Longrightarrow t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Astfel avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-t^2} dt =$$

$$= -2\frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{t+1} \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$,deci f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Asimptota oblică spre $+\infty$ are forma generală: $y = mx + n$, cu $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ si $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} =$
$1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Aplicăm regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi obţinem:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$.

Astfel obţinem $m = 1$.

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} + \ln(x^2+1) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} -$
$x) + \lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}) + \infty = +\infty$.

Deci f nu admite nici asimptotă oblică spre $+\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b} + x\right) = \lim\limits_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2-ay+b} - y\right) =$

$$= \lim_{y\to\infty} \left(\frac{-ay+b}{\sqrt{y^2-ay+b}+y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left(\frac{y(-a+\frac{b}{y})}{y(\sqrt{1-\frac{a}{y}+\frac{b}{y^2}}+1)}\right) = -\frac{a}{2}.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b} + x\right) = 1 \Longrightarrow a = -2$.

Valoarea lui b nu influenţează valoarea limitei, deci $b \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. Pentru ca radicalul să existe impunem conditia: $x^3 - 9 \geq 0 \Longleftrightarrow \left(x - \sqrt[3]{9}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{9}x + \sqrt[3]{81}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \sqrt[3]{9}$.

Considerând functia $f : \left[\sqrt[3]{9}, +\infty\right) \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{2x^3 - 18}$, aceasta este bijectivă (pe $\left(\sqrt[3]{9}, +\infty\right)$ are derivata strict pozitivă deci este strict crescătoare, deci injectivă, $f(\sqrt[3]{9}) = 0$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^3-18}\right) = +\infty$, adică este şi surjectivă), deci inversabilă. $\sqrt{x^3-9} = y \Longrightarrow x^3 = y^2 + 9 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y^2+9}$. Astfel $f^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow \left[\sqrt[3]{9}, +\infty\right)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+9}$.

Ecuaţia este de forma $f(x) = f^{-1}(x) \Longrightarrow$ egalitatea poate să apară doar pe prima bisectoare a axelor de coordonate, deoarece graficele lor sunt simetrice faţă de aceasta.

Rezolvăm ecuaţia $f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{x^3-9} = x \Longleftrightarrow x^3 - 9 = x^2$.

Pentru a studia câte rădăcini are acestă ecuatie $x^3 - x^2 - 9 = 0$, considerăm funcţia $g : \left[\sqrt[3]{9}, +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x^2 - 9$.

Evident $g'(x) = 3x^2 - 2x > 0$ pe $\left[\sqrt[3]{9}, +\infty\right)$, deci g este strict crescătoare şi este continuă. $g(\sqrt[3]{9}) = -\sqrt[3]{81}$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

Astfel, ecuaţia $g(x) = 0$ admite o singură rădăcină reală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

7. Dreapta $y = 2x + 1$ este tangentă parabolei $y = x^2 + ax + 2 \Longleftrightarrow$ ele se intersectează într-un singur punct, adică dacă ecuaţia $2x + 1 = x^2 + ax + 2$ admite o singură rădăcină reală.

$x^2 + (a-2)\,x + 1 = 0$ are o singură rădăcină reală $\Longleftrightarrow \Delta = 0$.

$(a-2)^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow a - 2 = \pm 2 \Longleftrightarrow a \in \{0, 4\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. Fie $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 1)$

Studiem variaţia lui f pe baza tabelului de variaţie.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to\infty} f(-y) = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{(y^2 + 6y + 1)}{e^y} = 0.$

Astfel f admite dreapta de ecuaţie $y = 0$ (axa Ox) drept asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$f'(x) = e^x\left(x^2 - 4x - 5\right)$.

Astfel $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

Realizăm tabelul de variaţie a lui f.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$8e^{-1}$	$\searrow$	$-4e^5$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = \dfrac{8}{e}$, $f(5) = -4e^5$.

Astfel, pentru ca ecuaţia $f(x) = a$ să aibă trei rădăcini reale $a \in \left(0, 8e^{-1}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. $\dfrac{x^2 + 3}{x^2 + ax + 5} \geq 0$.

Observăm că numărătorul este strict pozitiv. Atunci $\dfrac{x^2 + 3}{x^2 + ax + 5} \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + ax + 5 > 0$.

$x^2 + ax + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \Delta < 0 \Longleftrightarrow a^2 - 20 < 0 \Longleftrightarrow a \in \left(-\sqrt{20}, \sqrt{20}\right)$.

Astfel, cel mai mic număr întreg a ce respectă condiţia este -4.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Conform teoremei lui Bézout, $P(X) = X^3 - 3X + a$, $a \in \mathbb{R}$, este divizibil cu $X + 2 \Longleftrightarrow P(-2) = 0 \Longleftrightarrow -8 + 6 + a = 0 \Longleftrightarrow a = 2$.

Notăm suma cerută cu S.

$S = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}$.

Din relatiile lui Viète deducem:

$x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = -3$,

$x_1x_2x_3 = -a = -2$.

Astfel găsim $S = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} \Longleftrightarrow 1 + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} \Longleftrightarrow \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} - 1 = \sqrt{3}$

Soluţiile din $[0, 2\pi]$ sunt: $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \dfrac{bc}{a + b + c} = 1 \Longleftrightarrow bc = a + b + c$.

Astfel $b + c = bc - 10$.

Dar $b^2 + c^2 = 100 \Longrightarrow (b + c)^2 - 2bc = 100$.

$(bc-10)^2 - 2bc = 100 \Longleftrightarrow (bc)^2 - 22bc = 0 \Longleftrightarrow bc = 22 \Longrightarrow b+c = 12$.

$S = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{b + c}{bc} = \dfrac{12}{22} = \dfrac{6}{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow 1 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 - 2\dfrac{b}{a}\dfrac{c}{a}\cos A \Longrightarrow$

$1 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos A \Longrightarrow \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow m(\widehat{A}) = 30^0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x(3 - \ln x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{3 - \ln x}{\frac{1}{x}}$.

Aplicăm regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi obţinem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{3-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$f'(x) = 3 - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = 2 - \ln x.$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 2 \Longleftrightarrow x = e^2.$

Realizăm tabelul de variaţie a lui f.

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(e^2)=e^2$	$\searrow$	$-\infty$

Avem $f(e^2) = 3e^2 - 2e^2 = e^2 \Longrightarrow$ imaginea funcţiei f este: $(-\infty, e^2]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Fie M mijlocul segmentului AB. $M(\frac{2+a}{2}, \frac{5+b}{2})$ verifică ecuaţia dreptei date: $x + 3y - 1 = 0 \Longrightarrow$

$\frac{2+a}{2} + 3 \cdot \frac{5+b}{2} - 1 = 0 \Longleftrightarrow a + 3b + 15 = 0.$

$m_{AB} = \frac{b-5}{a-2}$. Panta dreptei pe care AB esteperpendiculară este $\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{b-5}{a-2} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Longleftrightarrow b - 5 = 2(2-a) \Longleftrightarrow 2a + b - 9 = 0.$

Am obţinut un sistem liniar de două ecuaţii cu două necunoscute. Soluţiile sale sunt: $a = \frac{42}{5}$, $b = -\frac{39}{5}$.

Astfel $a + b = \frac{3}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Observăm că $x^2 + 3x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă $x + 1 < 0$, atunci $\frac{x+1}{x^2+3x+4} < 0$ şi astfel membrul stâng al ecuaţiei ar fi negativ. Deci, în acest caz, nu există soluţii pentru ecuaţia dată.

Putem avea soluţii doar dacă $x + 1 > 0$.

De asemenea $x + 1 < x^2 + 3x + 4 \Longleftrightarrow x^2 + 2x + 3 > 0$, care este adevărată $\forall x \in \mathbb{R}$, fiind o funcţie de gradul doi cu $\Delta = -8 < 0$ şi coeficient pozitiv pentru x^2.

Astfel deducem că $0 < \frac{x+1}{x^2+3x+4} < 1 \Longrightarrow \left[\frac{x+1}{x^2+3x+4}\right] = 0.$

Înlocuind în ecuaţia dată găsim: $\left[\frac{x^2+3x+4}{x+1}\right] = 3 \Longleftrightarrow$

$3 \le \dfrac{x^2+3x+4}{x+1} < 4 \Longleftrightarrow 3x+3 \le x^2+3x+4 < 4x+4 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \le x^2+1 \\ x^2-x<0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (0,1)\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^n = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^n = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{6}-i\sin\dfrac{n\pi}{6}$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^n = 2\cos\dfrac{n\pi}{6} = \sqrt{3} \Longrightarrow$

$\cos\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \dfrac{n\pi}{6} \in \left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow n \in \{1+12k, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{11+12k, k\in\mathbb{Z}\} \Longleftrightarrow n \in \{12k\pm 1, k\in\mathbb{Z}\}\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

18. $z = a+bi,\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

$|z-1+i| - (a+bi) = 2+4i$.

Deoarece $|z-1+i| - a \in \mathbb{R} \Longrightarrow -b = 4 \Longleftrightarrow b=-4;\ |z-1+i|-a = 2 \Longleftrightarrow |a-1+(b+1)i| - a = 2 \Longleftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2} = 2+a.$

Evident $2+a \ge 0,\ a \ge -2$.

Obţinem $(a-1)^2+(-3)^2 = 4+4a+a^2 \Longleftrightarrow 6a-6=0 \Longleftrightarrow a=1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n-2}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-2} - \left[\sqrt{n^2+n-2}\right]\right).$

Dar $n < \sqrt{n^2+n-2} < n+1,\ \forall n \ge 2, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left[\sqrt{n^2+n-2}\right] = n$ şi astfel limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n-2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-2}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)}{\sqrt{n^2+n-2}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{n(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. Prin calcul direct se observă că $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & -2^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$.

Se demonstrează prin inducţie că $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 & -2^{2n} \\ 0 & -1 & 0 \\ -2^{2n} & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix}$

$(A^{2n+1} = A^{2n-1} \cdot A^2)$.

$B = \sum_{k=0}^{n} A^{2k+1} = \begin{pmatrix} s & 0 & -s \\ 0 & -n-1 & 0 \\ -s & 0 & s \end{pmatrix}$, $s = 1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{2n} = \dfrac{1-(2^2)^{n+1}}{1-2^2} = \dfrac{2^{2(n+1)}-1}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

21. $x{*}y = xy - ax - ay + a(a+1) = (x-a)(y-a) + a$.

$x{*}y * z = (x-a)(y-a)(z-a) + a$.

Prin inducţie se demonstrează că $\underbrace{x * x * ... * x}_{n \text{ ori}} = (x-a)^n + a$.

Astfel obţinem: $\underbrace{5 * 5 * ... * 5}_{2024 \text{ ori}} = (5-a)^{2024} + a$.

Ecuaţia devine: $(5-a)^{2024} + a = 9^{1012} + a \iff (5-a)^{2024} = 3^{2024} \iff 5 - a = \pm 3 \iff a \in \{2, 8\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + 2024 \cdot 2024! = (2-1)1! + (3-1) \cdot 2! + ... + (2025-1) \cdot 2024! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + ... + (2025! - 2024!) \Longrightarrow$
$S = 2025! - 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. Se ştie că restul împărţirii lui $P(X)$ la $X+1$ este $P(-1)$.
Deci $P(-1) = 3^{2025} + 1 \iff 3^{2025} - 1 + a = 3^{2025} + 1 \iff a = 2$.
Suma coeficienţilor polinomului este:
$P(1) = 3\,(3)^{2024} + 1 + 2 = 3^{2025} + 3 = 3\,(3^{2024} + 1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. Considerăm $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(1+x)$, care este continuă şi deci integrabilă pe domeniul considerat.

$f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} \geq 0,\ \forall x \in [0,1] \Longrightarrow f$ este crescătoare deci $f(x) \geq f(0) = 0,\ \forall x \in [0,1]$.

Calculând integrala prin părţi obţinem:

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\ |_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(x+1-1)}{(1+x)}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ |_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)}dx\right) =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x}{2}\ |_0^1 - \frac{1}{2}\ln(x+1)\ |_0^1 = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Avem, pe intervalul considerat: $1 \leq 1+3x \leq 4 \Longrightarrow 1 \leq (1+3x)^{\frac{1}{n}} \leq 4^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow$prin înmulţirea cu $f(x) \geq 0 \Longrightarrow$

$x\ln(1+x) \leq (1+3x)^{\frac{1}{n}}\, x\ln(1+x) \leq 4^{\frac{1}{n}} x\ln(1+x)$.

Deducem că $\int_0^1 x\ln(1+x)dx \leq \int_0^1 (1+3x)^{\frac{1}{n}}\, x\ln(1+x)dx \leq \int_0^1 4^{\frac{1}{n}} x\ln(1+x)dx \Longrightarrow \frac{1}{4} \leq \int_0^1 (1+3x)^{\frac{1}{n}}\, x\ln(1+x)dx \leq 4^{\frac{1}{n}} \int_0^1 x\ln(1+x)dx$.

Trecând la limită în relaţia de mai sus obţinem:

$\dfrac{1}{4} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1+3x}\, x\ln(1+x)dx \leq \lim\limits_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}}\dfrac{1}{4} \Longrightarrow$ folosind criteriul cleştelui că

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{1+3x}\, x\ln(1+x)dx = \frac{1}{4}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

25. Calculăm integrala prin părţi şi obţinem:

$$\int_0^x \left(t^2-1\right)e^t dt = e^t(t-1)^2\ |_0^x = e^x(x-1)^2 - 1.$$

Deci $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x(x-1)^2 - 1$, şi evident este o funcţie continuă.

Evident $f'(x) = \left(x^2-1\right)e^x \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(x^2-1\right)e^x = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$.Doar $x = 1 \in [0,\infty)$.

Dacă $x \in [0,1) \Longrightarrow f'(x) < 0, \Longrightarrow f$ este descrescătoare, dacă $x \in (1,+\infty) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ este crescătoare, astfel 1 este punct de minim pentru f. Sau direct: $e^x(x-1)^2 \geq 0 \Longrightarrow e^x(x-1)^2 - 1 \geq -1$.

$f(1) = -1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Astfel imaginea funcţiei este $[-1,\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

26. Se aplică regula lui l'Hospital. Astfel avem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+2x+4)}{\ln(2x^4+x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2+2}{x^3+2x+4}}{\frac{8x^3+2x}{2x^4+x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^3+2x+4} \cdot \frac{2x^4+x^2+1}{8x^3+2x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{t}{2t^4+3t^2+1}dt.$

Efectuăm schimbarea de variabilă $t^2 = u \Longrightarrow 2tdt = du$, $t \in [1,x] \Longrightarrow u \in [1,x^2]$ şi obţinem:

$$\int_1^x \frac{t}{2t^4+3t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{1}{2u^2+3u+1}du = \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{1}{u^2+\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{1}{\left(u+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}du = \frac{1}{4}2\ln\left|\frac{u+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{u+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_1^{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2u+1}{2u+2}\right|\Bigg|_1^{x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x^2+1}{2x^2+2} - \ln\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\left(2x^2+1\right)}{3\left(x^2+1\right)}\right)$$

$$l = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\left(2x^2+1\right)}{3\left(x^2+1\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă a este: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

În punctul de abscisă 1 avem: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2} =$$

$$\frac{1-x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2+\left(x+1\right)^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}; \; f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ecuaţia tangentei este: $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4}(x-1) \Longleftrightarrow 4y + x - \pi - 1 = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

29. Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă.

Panta dreptei din enunţ este $m = 1$. Astfel deducem că şi panta tangentei trebuie să fie $1 \Longrightarrow f'(x) = 1$.

Cum $f(x) = \frac{2x^2+7}{x+3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x^2+12x-7}{(x+3)^2} = 1 \Longleftrightarrow 2x^2+12x-7 = x^2+6x+9 \Longleftrightarrow x \in \{-8, 2\}$.

$f(-8) = -27$, $f(2) = 3$. Astfel, coordonatele punctelor sunt: $(-8, -27)$ şi $(2, 3)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. $f(x) = xe^{-2x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-2x}(1-2x)$, deci $a_1 = -2$.

Dacă $f^{(n)}(x) = e^{-2x}(a_n x + b_n)$, calculăm $f^{(n+1)}(x) = \left(e^{-2x}(a_n x + b_n)\right)' = a_n e^{-2x} + (a_n x + b_n) e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(-2a_n x + a_n - 2b_n)$.

Dar $f^{(n+1)}(x) = e^{-2x}(a_{n+1}x + b_{n+1})$.

Deducem că: $a_{n+1} = -2a_n$. Astfel termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt termenii unei progresii geometrice cu raţia $q = -2$ şi primul termen $a_1 = -2$.

Deci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -2 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n$. şi $a_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

Varianta 35

1. Fie $y = x^2 \Longrightarrow y^2 - (3m+4)\,y + m^2 = 0$. Această ecuaţie trebuie să aibă două rădăcini reale pozitive.

$\Delta = (3m+4)^2 - 4m^2 = 5m^2 + 24m + 16$; $\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow m \in (-\infty, -4] \cup \left[-\dfrac{4}{5}, +\infty\right)$.

$y_1 + y_2 = 3m + 4 \geq 0 \Longleftrightarrow m \geq -\dfrac{4}{3}$; produsul rădăcinilor este evident pozitiv fiind m^2.

Astfel, pentru îndeplinirea tuturor condiţiilor $m \geq -\dfrac{4}{5}$.

Găsite rădăcinile pozitive $y_1 \leq y_2 \Longrightarrow$ rădăcinile ecuaţiei date sunt: $\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$. Deci două sunt negative şi două pozitive. Cum progresia aritmetică e un şir crescător sau descrescător, în funcţie de cum e raţia pozitivă, sau negativă, avem, în primul caz ordinea crescătoare:

$-\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_1}, \sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}$. $(*)$

Notăm $-\sqrt{y_2} = a$.

Fie r raţia progresiei aritmetice. Avem: a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$. Însă $(*)$ ne conduce la: $-a = a + 3r \Longrightarrow r = -\dfrac{2a}{3} \Longrightarrow$

$a, \dfrac{a}{3}, -\dfrac{a}{3}, -a \Longrightarrow -a^2 = -y_2$ si $-\dfrac{a^2}{9} = -y_1$.

Deci: $\dfrac{a^4}{9} = m^2 \Longrightarrow \dfrac{a^2}{3} = \pm m$ si $a^2 + \dfrac{a^2}{9} = 3m + 4$.

Cazul 1) $m = \dfrac{a^2}{3} \Longrightarrow 3m + \dfrac{m}{3} = 3m + 4 \Longrightarrow m = 12$.

Cazul 2) $m = -\dfrac{a^2}{3} \Longrightarrow -3m - \dfrac{m}{3} = 3m + 4 \Longrightarrow m = -\dfrac{12}{19}$.

Astfel $m \in \left\{-\dfrac{12}{19}, 12\right\}$.

Dacă raţia era negativă, ordinea se schimba astfel: $\sqrt{y_2}, \sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1}$, $-\sqrt{y_2}$, dar acest lucru nu aducea modificări în rezolvarea problemei.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Punând condiţiile de exisitenţă pentru radical şi pentru logaritmi deducem că $x \in \left(\dfrac{3}{2}, 6\right)$.

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x \Longleftrightarrow 2\ln\sqrt{2x-3} + \ln x = 2\ln(6-x) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \ln x(2x-3) = \ln(6-x)^2 \Longleftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$.

Astfel găsim: $x_1 = 3, x_2 = -12$. Convine doar prima valoare.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. $E(1) = 1 + a + b + 2i$.

$E(i) = -1 + ai + b + 2i$.

Avem de rezolvat sistemul: $\begin{cases} a + b = 3 + i \\ ai + b = 2 + 2i \end{cases} \Longrightarrow a - ai = 1 - i \Longrightarrow$ $a = 1 \Longrightarrow b = 2 + i$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{1}{2+i} + 2 + i = \frac{2-i}{5} + 2 + i = 2 + \frac{2}{5} + i(1 - \frac{1}{5})$$

$\Longrightarrow$partea reală a numărului găsit este $2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. Ca să existe radicalii impunem condiţia: $x \geq 1$. Folosind formula radicalilor dubli, sau formând pătrate sub radicali, obţinem:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} =$$
$$= \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right|.$$

Pentru ca egalitatea să fie îndeplinită trebuie ca $\sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = 2\sqrt{x-1} \Longleftrightarrow \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \sqrt{x-1} - 1 \Longleftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 \geq 0$.

Rezolvând inegalitatea obţinem: $\sqrt{x-1} \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

5. Aranjăm suma sub forma unei sume Riemann, astfel:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(3k)^3 + n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3(\frac{(3k)^3}{n^3} + 1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{\left(3\frac{k}{n}\right)^3 + 1}.$$

Alegând $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x)^3 + 1}$, care este o funcţie continuă, deci integrabilă pe domeniul de definiţie, observăm că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(3k)^3 + n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, adică o sumă Riemann ataşată funcţiei date, unei diviziuni a intervalului $[0,1]$ cu n părţi egale, cu norma tinzând la 0 ($\frac{1}{n} \to 0$) şi cu puncte intermediare de forma $\frac{k}{n}$, $1 \leq k \leq n$.

Astfel:

$$\lim_{n \to -\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(3k)^3 + n^3} \right) = \int_0^1 \frac{x^2}{27x^3 + 1} dx = \frac{1}{81} \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + \frac{1}{27}} dx =$$

$= \dfrac{1}{81} \ln \left| x^3 + \dfrac{1}{27} \right|_0^1 = \dfrac{1}{81} \left(\ln \dfrac{28}{27} - \ln \dfrac{1}{27} \right) = \dfrac{1}{81} (\ln 28) =$
$= \dfrac{1}{81} (2 \ln 2 + \ln 7)\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. Pornim de la faptul că $0 \le \{2x\} < 1 \Longrightarrow 0 \le 2\{2x\} < 2$.

Astfel $[x+3] \in [0,2)$, deci avem doar două cazuri de analizat: $[x+3] = 0$, $[x+3] = 1$.

Cazul 1)

$[x+3] = 0 \Longleftrightarrow x+3 \in [0,1) \Longleftrightarrow x \in [-3,-2)\,.$

Dar şi $2\{2x\} = 0 \Longrightarrow \{2x\} = 0 \Longrightarrow 2x - [2x] = 0 \Longrightarrow 2x = [2x] \Longrightarrow x = \dfrac{[2x]}{2}$.

$x \in [-3,-2) \Longrightarrow 2x \in [-6,-4) \Longrightarrow [2x] = -6 \Longrightarrow x = -3$ sau

$[2x] = -5 \Longrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$.

Astfel $x \in \left\{ -3, -\dfrac{5}{2} \right\}$.

Sau puteam proceda şi astfel: după obţinerea condiţiei:$x = \dfrac{[2x]}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2} \in [-3,-2)\,.$

$\Longrightarrow k \in [-6,-4) \Longrightarrow k \in \{-6,-5\} \Longrightarrow x \in \left\{ -3, -\dfrac{5}{2} \right\}.$

Cazul 2)

$[x+3] = 1 \Longleftrightarrow x+3 \in [1,2) \Longleftrightarrow x \in [-2,-1)\,.$

Dar şi $2\{2x\} = 1 \Longrightarrow \{2x\} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x - [2x] = \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow 2x = [2x] + \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{[2x]}{2} + \dfrac{1}{4}.$

$x \in [-2,-1) \Longrightarrow 2x \in [-4,-2) \Longrightarrow [2x] = -4 \Longrightarrow x = -2 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{7}{4}$ sau

$[2x] = -3 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{5}{4}.$

Sau puteam proceda şi astfel: după obţinerea condiţiei $x = \dfrac{[2x]}{2} + \dfrac{1}{4} \Longrightarrow x = \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{4}, \dfrac{2k+1}{4} \in [-2,-1)$

$\Longrightarrow 2k+1 \in [-8,-4) \Longrightarrow 2k \in [-9,-5) \Longrightarrow k \in \left[-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right) \Longrightarrow k \in \{-4,-3\} \Longrightarrow x \in \left\{-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right\}$.

Astfel $x \in \left\{-3, -\frac{5}{2}\right\} \cup \left\{-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right\} = \left\{-3, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Avem: $x_1 + x_2 = -(2a+1)$ şi $x_1 x_2 = 2$. $(*)$

$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{5}{8} \Longleftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = \frac{5}{8} \Longleftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^3 x_2^3} = \frac{5}{8}$.

Introducând valoarea produsului rădăcinilor în relaţia de mai sus obţinem: $\frac{(x_1+x_2)^3 - 6(x_1+x_2)}{8} = \frac{5}{8} \Longleftrightarrow (x_1+x_2)^3 - 6(x_1+x_2) - 5 = 0$.

Notând $x_1+x_2 = S$, obţinem: $S^3 - 6S - 5 = 0 \Longleftrightarrow (S+1)(S^2-S-5) = 0 \Longrightarrow S_1 = -1$, $S_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $S_3 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Astfel obţinem:

$-(2a+1) = -1 \Longrightarrow a = 0$

$-(2a+1) = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \Longrightarrow a = -\frac{3+\sqrt{21}}{4}$.

$-(2a+1) = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \Longrightarrow a = -\frac{3-\sqrt{21}}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. Prin calcul direct, sau folosind teorema Cayley-Hamilton, se arată că: $A^2 - 5A + 9I_2 = O_2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

9. Intersectia celor două curbe este mulţimea vidă dacă şi numai dacă nu există puncte din plan ale căror coordonate să verifice ambele ecuaţii, altfel spus, dacă şi numai dacă ecuaţia $-x+3 = x^2 - (3a+1)x + 2$ nu are rădăcini reale.

$x^2 - 3ax - 1 = 0$ nu are rădăcini reale$\Longleftrightarrow \Delta < 0 \Longleftrightarrow 9a^2 + 4 < 0$, fals. Nu există astfel de valori ale parametrului real a.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. Rezolvăm sistemul prin substituţie. $3^x - y = 10 \Longrightarrow y = 3^x - 10 \Longrightarrow 3^{-x} - \frac{1}{3^x - 10} = \frac{10}{9}$.

Notăm $3^x = t > 0$.

Obţinem: $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t-10}=\dfrac{10}{9}\Longleftrightarrow t^2-10t+9=0\Longrightarrow t_1=1,\, t_2=9.$

Ne intoarcem la substituţia făcută şi obţinem: $x_1=0, x_2=2$. Aflăm apoi valorile corespunzătoare ale lui $y: y_1=-9,\, y_2=-1$.

Perechile obţinute sunt: $(0,-9)\,,\,(2,-1)\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

11. Se foloseşte tabelul cu semnul funcţiei de gradul al doilea. Obţinem următorul tabel.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		5		$+\infty$
x^2-3	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-6x+5	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-3}{x^2-6x+5}$	$+$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	$+$

Se observă că soluţia este: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left(1,\sqrt{3}\right]\cup(5,+\infty)\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. Prin calcul direct se observă că $\det(A)=0$ şi că $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -5\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \operatorname{rang}(A)=2$.

Impunem condiţia ca $\operatorname{rang}(B)=2\Longrightarrow \det(B)=0$.

$\det(B)=1-3a^2+2a+a^2-6-a=-2a^2+a-5$.

Ecuaţia $-2a^2+a-5=0$ nu admite rădăcini reale pentru că $\Delta=-39<0$.

Astfel, nu există valori reale ale lui a care să conducă la $\det(B)=0\Longrightarrow\operatorname{rang}(B)=3\neq\operatorname{rang}(A)\,.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

13. Observăm că $x*x=3+(x-3)^{\ln(x-3)}\Longrightarrow (x*x)*x=3+(x*x-3)^{\ln(x-3)}=3+\left((x-3)^{\ln(x-3)}\right)^{\ln(x-3)}=3+(x-3)^{(\ln(x-3))^2}\,.$

Prin inducţie se demonstrează că $\underbrace{x*x*...*x}_{n\text{ ori}}=3+(x-3)^{(\ln(x-3))^{n-1}}\,.$

Astfel: $\underbrace{x*x*...*x}_{2023\text{ ori}}=3+(x-3)^{(\ln(x-3))^{2022}}\,.$

Astfel ecuaţia devine: $3+(x-3)^{(\ln(x-3))^{2022}}=x\Longleftrightarrow (x-3)^{(\ln(x-3))^{2022}}=(x-3)\,.$

Se poate ca $x-3=1\Longleftrightarrow x=4$ sau $(\ln(x-3))^{2022}=1\Longleftrightarrow \ln(x-3)=\pm1\Longrightarrow x-3=e\Longrightarrow x=3+e$ sau $x-3=\dfrac{1}{e}\Longrightarrow x=3+\dfrac{1}{e}$.

Astfel suma soluţiilor ecuaţiei este $10+e+\frac{1}{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Din teorema împărţirii cu rest putem scrie: $P(X) = X(X-1)\cdot Q(X) + R(X)$, cu $R(X) = aX + b$.

Pentru $X = 0 \Longrightarrow P(0) = 0 + R(0) = b$.

Pe de altă parte $P(0)$ este termenul liber al polinomului $P(X)$, deci $b = 2$.

Pentru $X = 1 \Longrightarrow P(1) = 0 + R(1) = a + b$.

Pe de altă parte $P(1)$ reprezintă suma coeficienţilor polinomului $P(X)$, deci $a + b = 10 \Longrightarrow a = 8$.

Astfel obţinem: $R(X) = 8X + 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. Notăm cu $E(x) = \sin x(1 + \text{ctg } x) + \cos x(1 + \text{tg } x) = \sin x + \cos x + \cos x + \sin x = 2(\sin x + \cos x)$.

Dar $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x\cos x = 1 \Longrightarrow$

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Cum $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow \sin x + \cos x < 0 \Longrightarrow \sin x + \cos x = -\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Astfel $E(x) = -2\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = -\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{4+m^2}\cdot\sqrt{1+9}} = \dfrac{-2+3m}{\sqrt{4+m^2}\sqrt{10}} \Longrightarrow \dfrac{-2+3m}{\sqrt{4+m^2}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Longleftrightarrow \dfrac{-2+3m}{\sqrt{4+m^2}} = 1 \Longleftrightarrow -2+3m = \sqrt{4+m^2}$.

Astfel pentru $m \geq \dfrac{2}{3} \Longrightarrow 4 + m^2 = 9m^2 - 12m + 4 \Longleftrightarrow 2m^2 - 3m = 0 \Longleftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $\dfrac{3\sin x + 4\cos x}{6\cos x - \sin x} = \dfrac{3\dfrac{\sin x}{\cos x} + 4}{6 - \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{3\text{tg } x + 4}{6 - \text{tg } x} = 19$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. Fie M mijlocul laturii $BC \Longrightarrow M(1, -2)$.

Panta medianei AM este $m = \dfrac{-2-3}{1+1} = -\dfrac{5}{2}$.

Paralela prin C la mediană trebuie să aibă aceeaşi pantă $-\dfrac{5}{2}$.

Obţinem astfel ecuaţia: $y+3=-\dfrac{5}{2}(x-0) \Longleftrightarrow 2y+5x+6=0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Verificăm dacă f admite asimptotă orizontală la $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{y\to\infty} f(-y)=\lim_{y\to\infty}\left(-y+\sqrt{|y^2-4|}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{|y^2-4|-y^2}{y+\sqrt{|y^2-4|}}\right)$$

Atunci când y ia valori foarte mari avem $y^2-4\geq 0$, deci obţinem:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{-4}{y+\sqrt{y^2-4}}\right)=0.$$

$y=0$ este asimptota orizontală la $-\infty$ a funcţiei.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\,|x+1|}{(x+1)\left(x^2-x+3\right)}, & x\neq -1,\\ a, & x=-1,\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2-x+3)}, & x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty),\\ a, & x=-1,\\ -\dfrac{x}{(x^2-x+3)}, & x\in(-1,0),\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x}{(x^2-x+3)}=\frac{-1}{5},$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{-x}{(x^2-x+3)}=\frac{1}{5}.$$

Observăm că f are limite laterale diferite în (-1), deci nu are limită în acest punct, deci nu poate fi continuă.

Deci nu există valori reale ale lui a care să verifice cerinţa problemei.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. $F(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}dx=$

$$\int\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{1}dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx-\int x^2dx=\int x\sqrt{x^2+1}dx-\frac{x^3}{3}.$$

Notăm $x^2+1=u(x)$, observăm că $u'(x)=2x$ şi putem scrie:

$$F(x)=\frac{1}{2}\int u'(x)\,u^{\frac{1}{2}}(x)\,dx-\frac{x^3}{3}=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}+C=$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{x^3}{3} + C.$$

Determinăm constanta C impunând condiţia: $F(1) = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3} \Longrightarrow C = \frac{2-2\sqrt{2}}{3}$.

Astfel expresia primitivei cerute este:

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{x^3}{3} + \frac{2-2\sqrt{2}}{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin x\left(1-\cos x\right)dx =$$

$$= -4\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 4 + \cos 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 - 1 - 1 = 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+3}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+x^2-3}{x^2}.$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^3+x^2-3 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)\left(2x^2+3x+3\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Realizăm tabelul de variaţie a lui f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avem $f(1) = 5 \Longrightarrow$imaginea functiei f este: $[5, +\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Cum $|x-1| = x-1, x \in [1,2]$ si $|x-1| = -x+1, x \in [0,1]$ obţinem:

$$I = \int_0^2 |x-1|\,e^x dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + \int_1^2 (x-1)e^x dx.$$

Calculând integralele de forma următoare, pe baza integrării prin părţi, avem:

$$\int_a^b xe^x dx = \int_a^b x\left(e^x\right)' dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)\,\Big|_a^b\,.$$

Astfel, $I = e^x\,\big|_0^1 - e^x(x-1)\,\big|_0^1 + e^x(x-1)\,\big|_1^2 - e^x\,\big|_1^2 = 2(e-1)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Am aplicat regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Astfel, f nu admite asimptotă oblică spre $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$.

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Realizăm tabelul de variaţie a lui f.

x	0		1	e	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$+$	$+$	0	$-$

Avem $f(1) = 0 \Longrightarrow$imaginea funcţiei f este: $[0,+\infty)$.

$f''(x) = \left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)' = 2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x) = \frac{2}{x^2}(1-\ln x) \Longrightarrow f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$.

Evident pe $(0,e)$ funcţia este convexă, iar pe $(e,+\infty)$ ea este concavă, deci $x = e$ este punct de inflexiune.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

26. $l = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\,\mathrm{arctg}^2 x = 0\cdot(+\infty)$, nedeterminare pe care o eliminăm prelucrând expresia cu ajutorul formulelor trigonometrice cunoscute.

$$l = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)\sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)\sin^2 x}{1-\sin^2 x} =$$

$= \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{1}{2}$.

Se poate calcula limita şi aplicând regula lui l'Hospital.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

27. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3} + \dfrac{-2}{(x+1)^3} \Longrightarrow f''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^4} + \dfrac{6}{(x+1)^4} > 0 \Longrightarrow$nu există puncte de inflexiune.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

28. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+a}{x^2-1} \Longrightarrow f'(x) = \left(\dfrac{x^2-2x+a}{x^2-1}\right)' = \dfrac{2x^2-2x(a+1)+2}{(x^2-1)^2}$.

Dacă 2 este punct de extrem local$\Longrightarrow f'(2)=0 \Longleftrightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

29. $f(x) = \dfrac{x^2+ax+1}{\sqrt{x^2+2}} \Longrightarrow f'(x) = \left(\dfrac{x^2+ax+1}{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \dfrac{x^3+3x+2a}{\sqrt{x^2+2}\,(x^2+2)}$.

Punctele de extrem local se găsesc printre zerourile derivatei, deci ea trebuie să aibă cel puţin 3 zerouri.

$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x^3+3x+2a=0$.

Alegând $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3+3x+2a$, observăm că ea este o funcţie continuă, derivabilă iar $g'(x)=3x^2+3>0$.

Astfel g este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, atunci ecuatia $g(x)=0$ are o singură rădăcină reală.

Astfel, nu există valori reale ale lui a, pentru care f să admită trei puncte de extrem local.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Notăm $I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+x+1}dx$, avem $I_{n+1}-I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{x^{n+1}-x^n}{x^2+x+1}dx \le 0$. Astfel $I_{n+1}\le I_n, \forall n\ge 0$. $(*)$

$I_{n+2}+I_{n+1}+I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{x^{n+2}+x^{n+1}+x^n}{x^2+x+1}dx = \int\limits_0^1 \dfrac{x^n(x^2+x+1)}{x^2+x+1}dx = \int\limits_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$.

Folosind $(*)$, deducem că:

$3I_n \ge I_{n+2}+I_{n+1}+I_n \ge 3I_{n+2} \Longleftrightarrow 3I_n \ge \frac{1}{n+1} \ge 3I_{n+2}$.

$\dfrac{1}{3\,(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3\,(n-1)} \Longrightarrow (3n+1)\dfrac{1}{3\,(n+1)} \le (3n+1)I_n \le (3n+1)\dfrac{1}{3\,(n-1)}$.

Trecând la limită în relaţia precedentă obţinem:

$1 \le \lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+x+1}dx \le 1$, şi, din criteriul cleştelui, deducem că: $l = \lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+x+1}dx = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 36

1. Pentru progresia aritmetică 3, 9, 15,.., 117 raţia este 6.
Ultimul termen se scrie $117 = 3 + k \cdot 6 \implies k = 19$.
Deci suma ultimilor 10 termeni este

$$S = (3+10{\cdot}6)+...+(3+19{\cdot}6) = 10\frac{(3+10\cdot 6)+(3+19\cdot 6)}{2} = 5{\cdot}30{\cdot}6 = 900.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Graficul funcţiei are două puncte comune cu axa Ox este echivalent cu ecuaţia $x^2 - 2(a+1)x + 1 + a = 0$ are două rădăcini distincte, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $\Delta > 0$.
Deci $\Delta = (-2(a+1))^2 - 4(1+a) > 0 \iff 4(a+1)(a+1-1) > 0$ $\iff$
$a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3.

$$\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}\right| = \frac{\left|\sqrt{3}+\sqrt{5}i\right|}{\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}i\right|} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ pentru } n \text{ par},$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1 \text{ pentru } n \text{ impar}.$$

Şirul are două subşiruri convergente la limite diferite, deci şirul este divergent.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. În dezvoltarea binomului $(1-x^2)^7$ apar numai puteri de forma $(x^2)^k$, deci coeficientul lui x^3 este zero.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Punctele $A(1,0)$, $B(1,1)$ au aceeaşi abscisă, deci AB este perpendicular pe Ox.
În plus $OA = AB = 1$, deci triunghiul OAB este dreptunghic isoscel.
Înălţimea dusă din A este şi mediană şi egală cu $\frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Avem condiţiile $x^2 - 1 \geq 0$, $1 - x^2 \geq 0$, deci $x^2 - 1 = 0 \implies$ $x = 1$, $x = -1$ şi ambele soluţii verifică ecuaţia.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8.

$$\sin x + \cos x = 1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,,\; x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

şi obţinem soluţiile $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Punctele A, B au aceeaşi ordonată 0, deci dreapta AB coincide cu axa Ox şi $AB = 5 - 1 = 4$.

Punctele C, D au aceeaşi ordonată 2, deci dreapta CD este paralelă cu Ox şi $CD = 7 - 3 = 4$.

Prin urmare $ABCD$ este un paralelogram.

Înălţimea paralelogramului este distanţa dintre AB şi CD, care sunt paralele cu Ox, deci înălţimea este 2, iar aria paralelogramului $ABCD = 2 \cdot 4 = 8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

10. Avem succesiv

$$(f \circ f \circ f \circ f)(0) = f(f(f(f(0)))) = f(f(f(1))) = f(f(3)) = f(7) = 15.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Ecuaţia se rescrie $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$, care este ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = (-2)^2 - 4 = 0$ şi soluţia $3^x = 1$, $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Determinantul matricii este $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, deci matricea este inversabilă.

Matricea transpusă este $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matricea reciprocă este $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. Derivatele funcţiei sunt

$$f'(x) = (x + \cos x)' = 1 - \sin x,$$

$$f''(x) = (1 - \sin x)' = -\cos x.$$

Derivata a doua se anulează în punctele $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{-\pi}{2}$ şi $f''(x)$ are semne contrare de o parte şi de alta acestor puncte, deci sunt puncte de inflexiune.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14.

$$\int_0^1 \left(x - \frac{3}{2}x^2 + 4x^3\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^4\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. Derivata este $f'(x) = (x + \sin x)' = 1 + \cos x \geq 0$, deci funcţia este crescătoare pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

$-\pi$ este punct de minim, π este punct de maxim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16.

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^3}{x - \frac{3}{2}} = \frac{0}{0}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^3)'}{\left(x - \frac{3}{2}\right)'} = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{1} \underset{x \to \frac{3}{2}}{\to} 2\mathrm{e}^3,$$

deci limita iniţială este

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^3}{x - \frac{3}{2}} = 2\mathrm{e}^3.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. Avem o integrală pe un interval simetric $[-4, 4]$ dintr-o funcţie impară $\sin x \cos^5 x$, prin urmare

$$\int_{-4}^4 \sin x \cos^5 x \mathrm{d}x = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. Are loc egalitatea

$$X^7 - 1 = (X - 1)(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1),$$

deci câtul este $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. Ecuaţia $z^6 - 1 = 0$ are soluţiile $z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$, $k = \overline{0, 5}$.

Aceste puncte sunt vârfurile unui hexagon regulat cu latura egală cu raza cercului $= 1$.

Prin urmare perimetrul hexagonului este 6.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Pentru $x \neq 0$ derivata este

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Pentru $x = 0$ limita pentru derivată este

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

deci funcţia nu este derivabilă pentru $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci matricea $(A)^{2024} = O$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

22. Avem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$

şi din relaţiile lui Viète avem $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$, $x_1x_2x_3 = -1$, deci $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

23. Avem

$$x \circ x = \mathrm{e}^{x+x} = 4 \;\; , \;\; 2x = \ln 4 \;\; , \;\; x = \ln 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii într-un punct $x = b$ este

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Pentru $f(x) = x^3$ avem $f'(x) = 3x^2$.

Ecuaţia tangentei la grafic în $x = 0$ este

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Pentru $x \in [2,4]$ avem $|x+1| = x+1$, $|x-2| = x-2$, $|x-4| = 4-x$.

Ecuaţia devine $x+1+x-2-4+x=0$, $x=\frac{5}{3}$, dar $\frac{5}{3} \notin [2,4]$, deci nu este soluţie.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Funcţia parte fracţionară este periodică cu perioada 1.
deci

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x\mathrm{d}x = 2x^2\Big|_{x=0}^{x=1} = 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. Şirul $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ este descrescător, $x_{11} < x_{10}$

$$x_{11} = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11},\ x_{10} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}.$$

În intervalul $\left(\frac{12}{11}, \frac{11}{10}\right)$ nu se află nici un termen al şirului.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

28. Calculăm limitele la infinit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Asimptotele orizontale sunt $y = \frac{\pi}{2}$ la $+\infty$, $y = -\frac{\pi}{2}$ la $-\infty$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$

29.

$$\int_0^{\pi/2} (\arcsin x + \arccos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. Limita este de tip

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^{2023}\right)}{\ln\left(1+x^{2023}\right)} = \frac{0}{0}.$$

Putem folosi regula lui l'Hospital sau limite cunoscute,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1\ ,\ \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Deci
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{2023}\right)}{\ln\left(1+x^{2023}\right)}=\frac{\sin\left(x^{2023}\right)}{x^{2023}}\frac{x^{2023}}{\ln\left(1+x^{2023}\right)}=1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

Varianta 37

1. Din $z^3 = \overline{z}$ deducem că $|z^3| = |\overline{z}| \iff |z|^3 = |z| \iff |z|^3 - |z| = 0$ $\iff |z|\left(|z|^2 - 1\right) = 0$, pentru care avem soluţiile $|z| = 0 \iff z = 0$ şi $|z| = 1$.

Pentru $|z| = 1$, avem $z \cdot \overline{z} = 1$, deci $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

În acest caz, ecuaţia iniţială devine

$$z^3 = \frac{1}{z} \iff z^4 = 1 \iff (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0,$$

din care obţinem:

pentru $z^2 - 1 = 0 \iff (z-1)(z+1) = 0$ cu soluţiile $z = 1$, $z = -1$,
pentru $z^2 + 1 = 0 \iff (z-i)(z+i) = 0$ cu soluţiile $z = i$, $z = -i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. Un sistem liniar omogen are soluţie unică dacă şi numai dacă determinantul sistemului este diferit de zero.

În acest caz $\det\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & -m^3 \end{pmatrix} \neq 0 \iff -m^3 - m \neq 0$
$-m(m^2+1) \neq 0 \implies$ doar $m \neq 0$, deoarece $m^2 + 1 = 0$ nu are soluţii reale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. Polinomul $\left(X^5 - 7\right)^5$ are termenii de forma $C_5^k \left(X^5\right)^k \cdot (-7)^{5-k}$.

Niciunul din aceşti termeni nu conţine X^6, prin urmare coeficientul lui X^6 este zero.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. Punctele de intersecţie ale parabolei $y = x^2 + 6$ cu dreapta $y = 5x$ sunt soluţiile sistemului

$\begin{cases} y = x^2 + 6 \\ y = 5x \end{cases} \implies 5x = x^2 + 6 \iff$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$ şi soluţiile $x = \frac{-(-5)+1}{2} = 3$, $x = \frac{-(-5)-1}{2} = 2$, cu valorile corespunzătoare $y = 15$, $y = 10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Forma trigonometrică este

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

deci

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

Prin urmare

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=(-1)^2=1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Punctele $A(4,0)$ şi $B(4,4)$ au aceeaşi abscisă, deci AB este perpendicular pe OA.

Triunghiul OAB este dreptunghic cu unghi drept în A şi isoscel deoarece $OA=AB=4$, deci mediana dusă din A este şi înălţime şi este egală cu $\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Mai întâi avem condiţia $x+2\geq 0 \iff x\geq -2$.

Ridicăm la puterea a doua $\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2$ şi obţinem $x^2+2=x+2 \iff x^2-x=0 \iff x(x-1)=0$, care are soluţiile $x=0$, $x=1$.

Ambele soluţii verifică condiţia $x\geq -2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. Avem o limită de tip 1^∞, pentru care

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{n^2+1}{n^2}}=\ln\left(\mathrm{e}^1\right)=1,$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. Punctele A,B au aceeaşi ordonată 0, deci dreapta AB coincide cu axa Ox şi $AB=5-1=4$.

Punctele C,D au aceeaşi ordonată 2, deci dreapta CD este paralelă cu Ox şi $CD=7-3=4$.

Prin urmare $ABCD$ este un paralelogram.

$AD=\sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, perimetrul este $2AB+2AD=8+4\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

10. Avem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ şi atunci
$(f\circ f\circ f\circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(f\left(f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)=f\left(f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

11. În $\mathbb{Z}_4$ există divizori ai lui $\widehat{0}$, din acest motiv descompunerea în factori nu este utilă.

Verificăm direct:
pentru $\widehat{x}=\widehat{0}$ avem $\widehat{0}^2+\widehat{0}=\widehat{0}$;
pentru $\widehat{x}=\widehat{1}$ avem $\widehat{1}^2+\widehat{1}=\widehat{2}$;
pentru $\widehat{x}=\widehat{2}$ avem $\widehat{2}^2+\widehat{2}=\widehat{2}$;
pentru $\widehat{x}=\widehat{3}$ avem $\widehat{3}^2+\widehat{3}=\widehat{0}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Calculăm determinantul matricei $\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1\neq 0$, deci matricea este inversabilă.

Matricea transpusă este $A^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, matricea reciprocă este $A^*=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ şi inversa este $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. O funcţie derivabilă este neapărat şi continuă.

Studiem continuitatea în $x=0$.

Deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1 \implies \left|x^3\sin\frac{1}{x}\right|\le |x^3| \underset{x\to 0}{\to} 0$, conform criteriului majorării rezultă

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

deci funcţia este continuă în $x=0$.

Derivata pentru $x\neq 0$ este

$$f'(x)=\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

Limita derivatei în $x=0$ este

$$\lim_{x\to 0}\left[3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right]=0$$

din acelaşi motiv de majorare

$$\left|x^3\sin\frac{1}{x}\right|\le\left|x^3\right|,\quad \left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|,$$

$$\left|3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right| \leq \left|3x^2 \sin\frac{1}{x}\right| + \left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leq$$
$$\leq \left|3x^2\right| + |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Prin urmare derivata are limită în $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Pentru $x \in [4, 5]$ avem

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}, \ \ 0 < \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4^2},$$

deci

$$0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Integrala este

$$0 < \int_4^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x \leq \int_4^5 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \mathrm{d}x < 1,$$

deci partea întreagă a integralei este zero.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. Calculăm derivata funcţiei

$$f'(x) = (\mathrm{e}^x - x)' = \mathrm{e}^x - 1.$$

Punctele în care se anulează derivata sunt

$$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Derivata este $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$
Deci $x = 0$ este punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Limita este de tip

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{0}{0}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3},$$

deci limita iniţială este

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

17. Avem o integrală pe un interval simetric $[-20\pi, 20\pi]$ dintr-o funcţie impară $\cos x \sin 5x$, deci integrala este zero.

$$\int_{-20\pi}^{20\pi} \cos x \sin 5x \mathrm{d}x = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Are loc descompunerea în factori

$$X^7 + 1 = (X+1)(X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1),$$

deci câtul împărţirii este $X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

19. Ecuaţia se rescrie

$$(5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 = 0,$$

care este ecuaţie de grad doi, cu $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$ şi soluţiile

$$\frac{-(-5)+1}{2} = 3 \quad , \quad \frac{-(-5)-1}{2} = 2.$$

Obţinem soluţiile

$$5^x = 3 \iff x = \log_5 3 \quad , \quad 5^x = 2 \iff x = \log_5 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. Funcţia se rescrie

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}.$$

Derivata este

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln x} (x \ln x)' = \mathrm{e}^{x \ln x} \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci $A^3 + A = A$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. Avem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3}$$

din relaţiile lui Viète avem $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$, $x_1x_2x_3 = -1$, deci

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23.

$$x \circ x = \frac{x + x}{1 + x \cdot x} = 1 \iff 2x = 1 + x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0, \;\; x = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

24. Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii într-un punct $x = b$ este

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Pentru a determina punctele de inflexiune, calculăm derivata a doua

$$f'(x) = \left[(x-1)^3\right]' = 3(x-1)^2,$$

$$f''(x) = \left[3(x-1)^2\right]' = 3 \cdot 2(x-1).$$

Punctele în care se anulează derivata a doua sunt

$$6(x-1) = 0 \iff x = 1.$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $x = 1$ este

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y = 0,$$

deoarece $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

25. Avem $\sin x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, deci $2\sin x + \cos x \leq .3$

Avem egalitate numai dacă $\sin x = 1$, $\cos x = 1$, ceea ce este imposibil, ecuaţia nu are soluţii.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Observăm că

$$(\mathrm{e}^x \sin x)' = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x,$$

deci integrala este

$$\int_0^{\pi} (\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x \sin x)\big|_{x=0}^{x=\pi} = \mathrm{e}^{\pi} \sin \pi - \mathrm{e}^0 \sin 0 = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

27. Au loc inegalităţile

$$n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Calculăm limitele

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Conform criteriului cleştelui, limita iniţială este

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28. Pentru a determina o asimptotă oblică, calculăm limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3}{3x+3}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{4+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{3}{x}} = \frac{4}{3}.$$

Apoi calculăm limita

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{4}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+3}{3x+3}-\frac{4}{3}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+3-4x^2-4x}{3x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\frac{-4+\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}} = -\frac{4}{3}.$$

Ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$ este $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29.

$$\frac{x^2+1}{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+x^2} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}+1\right)x^2} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\to} 1,$$

deoarece

$$\left|\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right| \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30.

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2},$$

deci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arctg} x}{x^2+1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 38

1. Scriem în forma algebrică $z = x + iy$.

Ecuaţia devine $|x + iy + 1| = |x + iy - 1| \iff \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Ridicăm la puterea a doua $(x + 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2$.

Obţinem $2x = -2x \iff x = 0$.

Soluţiile sunt $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

2. Ecuaţia $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$ are 2 rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta > 0$, deci $(m + 1)^2 - 4m > 0$.

Obţinem inecuaţia $m^2 - 2m + 1 > 0$, $(m - 1)^2 > 0$, deci $m \neq 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. Pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ avem $\cos x \leq 0$, deci valoarea lui $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4.

$$C_n^1 + C_n^2 = 10 \iff n + \frac{n(n-1)}{2} = 10,$$

$$2n + n^2 - n = 20 \iff n^2 + n - 20 = 0$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-20) = 81$, deci $n = \frac{-1+9}{2} = 4$, $n = \frac{-1-9}{2} = -5$.

Deoarece $n \in \mathbb{N}$ soluţia acceptabilă este $n = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. Avem $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ şi $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, deci

$$(1+i)^7 + (1-i)^7 = (1+i)^6 (1+i) + (1-i)^6 (1-i) =$$

$$= (2i)^3(1 + i) + (-2i)^3(1 - i) = -8i(1 + i - 1 + i) = 16.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

6. Să observăm că în triunghiul OAB avem $OA = AB = 4$ şi AB este perpendicular pe OA.

Deci ΔOAB este triunghi dreptunghic isoscel.

C este mijlocul lui OB, deci mediana dusă din $C = \frac{1}{2}OA = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Avem condiţiile $2 - x \geq 0$, $x + 3 \geq 0$, deci $x \in [-3, 2]$.

Ridicăm la puterea a doua $\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3}\right)^2 = 3^2$ şi obţinem

$2-x+x+3+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+3}=9 \iff 2\sqrt{2-x}\sqrt{x+3}=4$, apoi ridicăm din nou la puterea a doua

$$(2-x)(x+3)=4 \iff x^2+x-2=0.$$

$$\Delta = 1^2-4(-2)=9 \text{ deci } x=\frac{-1+3}{2}=1,\ x=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Avem $1,-2\in[-3,2]$, deci soluţiile sunt $\{1,-2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. Putem scrie

$$x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x\ln x},$$

apoi calculăm limita

$$\lim_{x\searrow 0}(x\ln x) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \underset{x\searrow 0}{\to} 0.$$

Deci $\lim\limits_{x\searrow 0}(x\ln x)=0$, iar limita iniţială este $\lim\limits_{x\searrow 0}x^x = \mathrm{e}^0=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. Dacă desenăm punctele A, B, C în sistem de axe ortogonale xOy, se observă că punctul D de coordonate $(1,1)$ este mijlocul segmentului AC şi că unind $B(2,1)$ cu punctul $D(1,1)$ obţinem mediatoarea lui AC.

Deci aria triunghiului $ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}2\cdot 1=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Ecuaţia se rescrie $3\cdot 3^x+3\cdot(3^x)^2-1=0$ care este o ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta=3^2-4(-1)\cdot 3=21$ şi soluţiile $\frac{-3+\sqrt{21}}{2\cdot 3}$, $\frac{-3-\sqrt{21}}{2\cdot 3}$.

Deoarece $3^x>0$, singura soluţie acceptabilă este

$$3^x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2\cdot 3} \text{ deci } x=\log_3\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. Funcţia cosinus este funcţie pară, deci $\cos(x-\pi)=\cos(\pi-x)$.

Ecuaţia devine $\cos(x+\pi)=\cos(\pi-x)$ egalitate adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

12. Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.
Matricea $A^{2024} = (A^2)^{1012} = (-I)^{1012} = I$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. Funcţia se poate scrie

$$f(x) = (\sin x)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\ln(\sin x)^{\sin x}} = \mathrm{e}^{\sin x \ln(\sin x)}.$$

Calculăm derivata

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\sin x \ln(\sin x)}\right)' = \mathrm{e}^{\sin x \ln(\sin x)} \left(\sin x \ln(\sin x)\right)' =$$

$$= (\sin x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\sin x) + \sin x \frac{1}{\sin x}\cos x\right) = (\sin x)^{\sin x}\cos x(\ln(\sin x)+1).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. Integrala este

$$\int_0^4 \left(5x^4 - x + \frac{1}{8}\right)\mathrm{d}x = \left(x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=4} = 4^5 - \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{8}.$$

Partea fracţionară ese $\frac{1}{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Calculăm derivata funcţiei

$$f'(x) = (\mathrm{tg}x - 2x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 2.$$

Punctele în care se anulează derivata sunt

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 0 \iff 1 - 2\cos^2 x = 0 \implies \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Deoarece pentru $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\cos x > 0$.

Derivata are acelaşi semn cu funcţia $1-2\cos^2 x$, deci $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}\right)$.

Prin urmare $x = -\frac{\pi}{4}$ este punct de maxim, iar $x = \frac{\pi}{4}$ este punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Limita este de tipul

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(\ln(1+x))'}{(1+x^2)'} = \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2x(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{+\infty} = 0,$$

deci limita iniţială este

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17.

$$\frac{4}{1-x^4} - \frac{5}{1-x^5} = \frac{4-4x^5-5+5x^4}{(1-x^4)(1-x^5)} \underset{x\to1}{\to} \frac{0}{0}.$$

La numitor avem $(1-x^4)(1-x^5) = 1-x^4-x^5+x^9$.
Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(4-4x^5-5+5x^4)'}{(1-x^4-x^5+x^9)'} = \frac{-4\cdot 5x^4+5\cdot 4x^3}{-4x^3-5x^4+9x^8} = \frac{4\cdot 5x^3(-x+1)}{x^3(-4-5x+9x^5)}.$$

Folosim din nou regula lui l'Hospital pentru $\frac{-x+1}{-4-5x+9x^5}$

$$\frac{(-x+1)'}{(-4-5x+9x^5)'} = \frac{-1}{-5+9\cdot 5x^4} \underset{x\to1}{\to} \frac{-1}{8\cdot 5}.$$

Prin urmare

$$\lim_{x\to1} \frac{4\cdot 5x^3(-x+1)}{x^3(-4-5x+9x^5)} = \frac{4\cdot 5(-1)}{8\cdot 5} = \frac{-1}{2}.$$

Limita iniţială este

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{4}{1-x^4} - \frac{5}{1-x^5}\right) = \frac{-1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. Putem scrie

$X^3-X-6 = X^3-8-X+2 = (X-2)(X^2+2X+4)-(X-2) = (X-2)(X^2+2X+3)$.

Obţinem rădăcinile $X-2=0$, $X=2$.
$X^2+2X+3=0$, $\Delta = 2^2-4\cdot 3 = -9$, $X = \frac{-2+3i}{2}$, $X = \frac{-2-3i}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Mai întâi avem condiţiile $x>0$, $x\neq 1$, $x+1>0$

$$\log_x(x+1) = 2 \iff x^2 = x+1 \iff x^2-x-1=0,$$

$\Delta = (-1)^2-4(-1) = 5$, cu soluţiile:

$\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$.

Acceptabilă doar $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. Calculăm derivata funcţiei $f'(x) = (2\sin x - x)' = 2\cos x - 1$.

Punctele în care se anulează derivata sunt $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$ derivata este $f'(x) > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Funcţia creşte de la $x = 0$ până la $x = \frac{\pi}{3}$, descreşte până la $x = \pi$.

Obţinem $x = 0$ punct de minim, $x = \frac{\pi}{3}$ punct de maxim, $x = \pi$ punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. Avem $(a + a)^2 = a + a \iff a^2 + a + a + a^2 = a + a$ şi pentru că $a^2 = a$ şi rămâne $a + a = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. Se observă că funcţiile $\log_2 x$, $\log_3 x$, $\log_4 x$ sunt strict crescătoare, deci şi suma lor este strict crescătoare.

Pentru $x = 1$ avem $\log_2 1 + \log_3 1 + \log_4 1 = 0$.

Pentru $x < 1$ avem $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x < \log_2 1+\log_3 1+\log_4 1 = 0$.

Pentru $x > 1$ avem $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x > \log_2 1+\log_3 1+\log_4 1 = 0$.

Deci singura soluţie este $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Putem scrie în forma $(x^2)^2 + 4x^2 - 1 \geq 0$ care este inecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = 4^2 - 4(-1) = 20$ şi rădăcinile $\frac{-4+\sqrt{20}}{2} = -2 + \sqrt{5}$, $\frac{-4-\sqrt{20}}{2} = -2-\sqrt{5}$. Inecuaţia este verificată pentru $x^2 \in \left[-2 + \sqrt{5}, +\infty\right)$, deci $x \in \left[\sqrt{-2 + \sqrt{5}}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}\right]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

24. Calculăm derivata $f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$, calculăm derivata a doua $f''(x) = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = e^{-x}(-2 + x)$.

Derivata a doua se anulează pentru $x = 2$ şi funcţia are un punct de inflexiune.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Avem condiţia $x + 4 \geq 0$, deci $x \geq -4$

Ecuaţia devine $x+4-\sqrt{x + 4} = 1 \iff x+3 = \sqrt{x + 4}$, care impune şi condiţia $x + 3 \geq 0$.

Ridicăm la puterea a doua $(x+3)^2 = x+4 \iff x^2+5x+5=0$, cu $\Delta = 5^2 - 4\cdot 5 = 5$, soluţiile $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

Din condiţii rezultă doar soluţia $x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Să observăm că

$$[x\text{arctg}x]' = \text{arctg}x + x\frac{1}{1+x^2,}$$

deci integrala se calculează astfel

$$\int_0^1 \left(\text{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x\text{arctg}x|_{x=0}^{x=1} = \text{arctg}1 - 0\cdot\text{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

27. Avem o integrală pe un interval simetric $[-1,1]$ din funcţia impară $\frac{x(x^2+\cos x)}{x^2+\sin^2 x+1}$, deci

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x(x^2+\cos x)}{x^2+\sin^2 x+1}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

28. Calculăm derivata $f'(x) = (\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x}\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$.

Limita derivatei în $x=0$ este

$$\lim_{x\searrow 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}.$$

Facem schimbare de variabilă (sau notaţie) $\frac{1}{x} = y$.

Pentru $x \searrow 0$ avem $\frac{1}{x} \to +\infty$, deci $y \to +\infty$.

Limita devine

$$\lim_{x\searrow 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2} = \lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{-y}y^2 = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{\mathrm{e}^y} = 0.$$

Deoarece este limită de tip $\frac{\infty}{\infty}$ folosim regula lui l'Hospital de două ori

$$\frac{(y^2)'}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{2y}{\mathrm{e}^y} \quad , \quad \frac{(2y)'}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{2}{\mathrm{e}^y} \to \frac{2}{+\infty} = 0.$$

Valoarea limitei derivatei $f'(x)$ în $x=0$ este zero.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$

29.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x + \int (\mathrm{ctg}x)^2 \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3} (\mathrm{ctg}x)^3 + C.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

30. Avem

$$\left| \sin \frac{1}{x-1} \right| \leq 1,$$

$$\left| (x-1) \sin \frac{1}{x-1} \right| \leq |x-1| \underset{x \to 1}{\to} 0.$$

Conform criteriului majorării

$$\lim_{x \to 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 39

1. Dacă $z+\frac{1}{z}=-1$ atunci $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=1$, deci $z^2+2+\frac{1}{z^2}=1$ şi $z^2+\frac{1}{z^2}=-1$.

Apoi $\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2=(-1)^2$, deci $z^4+2+\frac{1}{z^4}=1$ şi $z^4+\frac{1}{z^4}=-1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. $\begin{cases} x+my=0 \\ mx+2y=0 \end{cases}$

Un sistem liniar omogen are soluţie unică dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este diferit de zero.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}\neq 0 \iff 2-m^2\neq 0 \iff (m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})\neq 0.$$

Deci $m\neq\sqrt{2}$, $m\neq-\sqrt{2}$ sau $m\in\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

3. Suma a 10 termeni ai unei progresii aritmetice $a_1,...,a_{10}$ cu raţia r este

$$S=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_1+a_1+9r)}{2}=100.$$

Deci

$$\frac{10(a_1+a_1+9\frac{1}{3})}{2}=100 \implies 2a_1=20-3,\ a_1=\frac{17}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x^2+1}+x^2+1-2=0$ sau $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+\sqrt{x^2+1}-2=0$, care este ecuaţie de gradul al doilea, $\Delta=1-4(-2)=9$, cu soluţiile

$$\frac{-1+3}{2}=1,\ \frac{-1-3}{2}=-2.$$

Deoarece $\sqrt{x^2+1}\geq 1>0$, este acceptabilă doar soluţia

$$\sqrt{x^2+1}=1 \iff x=0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

5. Din dezvoltarea celor două binoame $\left(3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3+\left(4+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$, termenul ce conţine $\frac{1}{\sqrt{x}}$ este

$$C_3^1 3^2\frac{-1}{\sqrt{x}}+C_3^1 4^2\frac{1}{\sqrt{x}},$$

coeficientul căutat este $3(-3^2) + 3 \cdot 4^2 = -3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

6. Punctele A şi B se află pe prima bisectoare $y = x$, punctul $C(3, -3)$ se află pe a doua bisectoare $y = -x$, deci pe mediatoarea segmentului AB, prin urmare triunghiul ABC este isoscel cu $AC = BC$.

Sau putem calcula lungimile segmentelor $AC = \sqrt{(-2-3)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{(2-3)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{26}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Mai întâi avem condiţiile $x - 3 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$.

Apoi ridicăm la puterea a doua

$$\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}\right)^2 = 3^2 \iff x - 3 + x + 3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} = 9,$$

$$9 - 2x = 2\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} \text{ , cu condiţia } 9 - 2x \geq 0.$$

Ridicăm din nou la puterea a doua

$$(9-2x)^2 = 4(x^2 - 3^2) \iff 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 2x + 4x^2 = 4x^2 - 4 \cdot 3^2$$

$$4x = 9 + 4,\ x = \frac{13}{4},$$

care verifică condiţiile $x \geq 3$, $x \leq \frac{9}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8.

$$(\sin x)^x = \mathrm{e}^{\ln(\sin x)^x} = \mathrm{e}^{x \ln \sin x}.$$

Apoi limita

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln \sin x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(\ln \sin x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\cos x}{\sin x \frac{-1}{x^2}} = -\frac{x^2 \cos x}{\sin x}.$$

pentru care limita este

$$\lim_{x \searrow 0} \left(-\frac{x^2 \cos x}{\sin x}\right) = 0,$$

deci $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = 0$ şi limita iniţială este

$$\lim_{x \searrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \searrow 0} \mathrm{e}^{x \ln \sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

9. Se observă că dreapta AC este paralelă cu axa Oy, deci perpendiculară pe Ox, iar $AC = 6$, $AB = 6$, prin urmare triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

Deci $BC = 6\sqrt{2}$. Lungimea înălţimii dusă din A este $\frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Ecuaţia se rescrie $(3^x)^2 + 5 \cdot 3^x - 6 = 0$, care este ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = 5^2 - 4(-6) = 49$ cu soluţiile

$$\frac{-5+7}{2} = 1,\ \frac{-5-7}{2} = -6.$$

Dar $3^x > 0$, deci este acceptabilă doar soluţia $3^x = 1 \implies x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. Pentru $|x| \geq 2$ avem

$$0 < \frac{4}{1+x^2}, \frac{5}{4+x^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Deci $\sin\left(\frac{4}{1+x^2}\right) = \sin\left(\frac{5}{4+x^2}\right) \iff \frac{4}{1+x^2} = \frac{5}{4+x^2}$, deoarece pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funcţia sinus este injectivă.

Ecuaţia

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{5}{4+x^2} \iff 4^2 + 4x^2 = 5 + 5x^2$$

$$x^2 = 11 \implies x = -\sqrt{11}\ ,\ x = \sqrt{11}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Determinantul matricei este $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, deci matricea este inversabilă.

Matricea transpusă este $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, matricea reciprocă este $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, inversa este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. Mai întâi funcţia se poate scrie astfel $x^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\ln x^{\sqrt{x}}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}$.

Apoi calculăm derivata

$$\left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}\left(\sqrt{x}\ln x\right)' =$$

$$= \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. Calculăm derivata funcţiei

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Derivata se anulează pentru

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0\,.$$

Pentru $x < 0$ avem $f'(x) > 0$, pentru $x > 0$ avem $f'(x) < 0$.
Deci funcţia are un punct de maxim în $x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

16. Putem scrie

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x^2} = \frac{1 - \frac{\ln(1+x)}{x}}{x}.$$

Apoi determinăm limita de tip

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Prin urmare $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.
Valoarea limitei iniţiale este

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 - \frac{\ln(1+x)}{x}}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Limita este de tip

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\mathrm{tg}x - x} = \frac{0}{0}.$$

Folosim regula lui l'Hospital

$$\frac{(x-\sin x)'}{(\mathrm{tg}x-x)'} = \frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}-1} = \frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Prin urmare valoarea limitei iniţiale este $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\mathrm{tg}x-x} = \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

18. Se observă că diagonalele AC şi BD sunt egale, se înjumătăţesc şi sunt perpendiculare (deoarece coincid cu axele Ox respectiv Oy).

Prin urmare $ABCD$ este un pătrat cu latura $AB = 3\sqrt{2}$.

Deci aria patrulaterului $ABCD = (3\sqrt{2})^2 = 18$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. Calculăm determinantul astfel:

- adunăm la linia întâi, liniile doi şi trei

$$\det\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} m+2 & m+2 & m+2\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix} =$$

$$(m+2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}.$$

Apoi scădem coloana întâi din coloanele doi şi trei şi dezvoltăm determinantul după linia întâi

$$(m+2)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & m-1 & 0\\ 1 & 0 & m-1\end{pmatrix} = (m+2)(m-1)^2.$$

Rezultă ecuaţia $(m+2)(m-1)^2 = 0 \implies m = -2, m = 1$.

Determinantul este diferit de zero pentru $m \in \mathbb{R}\backslash\{1,-2\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

20. Derivata funcţiei este

$$\left(\int_0^x \arcsin t\mathrm{d}t + \int_0^x \arccos t\mathrm{d}t\right)' = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in [0,1]$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

21. În inelul $\mathbb{Z}_6$ avem $\widehat{2}\cdot\widehat{3} = \widehat{0}$, deci $\widehat{3}$ nu este inversabil.

Prin urmare soluţiile ecuaţiei $\widehat{x} \cdot \widehat{3} = \widehat{0}$ se determină testând toate valorile posibile.

Se constată că $\widehat{0} \cdot \widehat{3} = \widehat{0}$, $\widehat{2} \cdot \widehat{3} = \widehat{0}$, $\widehat{4} \cdot \widehat{3} = \widehat{0}$ şi că $\widehat{1} \cdot \widehat{3} = \widehat{3}$, $\widehat{3} \cdot \widehat{3} = \widehat{3}$, $\widehat{5} \cdot \widehat{3} = \widehat{3}$.

Soluţiile ecuaţiei sunt $\widehat{0}$, $\widehat{2}$, $\widehat{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. Mai întâi avem condiţia $x > 0$.

Ecuaţia se rescrie $\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 x^2 \iff \log_2(x\sqrt{x}) = \log_2 x^2$ $\iff x\sqrt{x} = x^2 \iff x^2 - x\sqrt{x} = 0 \iff x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$.

Soluţia $x = 0$ nu este acceptabilă, singura soluţie este $\sqrt{x} - 1 = 0$, deci $x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. Să observăm că $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$.

Prin urmare rădăcinile ecuaţiei $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ verifică şi ecuaţia $x^4 - 1 = 0$, deci $x_1^4 = 1$, $x_2^4 = 1$, $x_3^4 = 1$.

Valoarea lui $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. Pentru ca o funcţie să fie derivabilă, este necesar să fie continuă.

Prin urmare funcţia trebuie să fie continuă în $x = 0$, deci limitele laterale în $x = 0$ să fie egale $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} (3x + a) = a = \lim\limits_{x \searrow 0} (bx - 5) = -5$, deci $a = -5$.

Apoi dacă şi limitele laterale ale derivatei în $x = 0$ sunt egale, atunci funcţia este derivabilă în $x = 0$.

Limitele laterale ale derivatei sunt $\lim\limits_{x \nearrow 0} (3x + a)' = \lim\limits_{x \nearrow 0} (3) = 3 = \lim\limits_{x \searrow 0} (bx - 5)' = \lim\limits_{x \searrow 0} (b) = b$, deci $b = 3$.

Valorile căutate sunt $a = -5$, $b = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. Suma coeficienţilor unui polinom $P(X)$ este $P(1)$.

Deci în acest caz $P(1) = (1 + 4)^3 - (2 \cdot 1 - 3)^5 = 5^3 - (-1)^5 = 126$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Să observăm că

$$\left((x^2 + 1) \ln x\right)' = 2x \ln x + \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Deci integrala se calculează astfel

$$\int_{x=1}^{x=2}\left(2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}\right)\mathrm{d}x=(x^2+1)\ln x\Big|_{x=1}^{x=2}=$$

$$(2^2+1)\ln 2-(1^2+1)\ln 1=5\ln 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

27. Să observăm că funcţia $x^3\cos x$ este o funcţie impară, deci integrala pe un interval simetric $[-2\pi,2\pi]$ este zero.

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}x^3\cos x\mathrm{d}x=0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

28. Mai întâi avem $x_1=3$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{\sqrt{3}}$.

Inductiv rezultă că termenii şirului sunt $x_n>1$.

Apoi şirul este descrescrescător, deoarece $x_{n+1}\le x_n \iff \sqrt{x_n}\le x_n$ $\iff x_n\le x_n^2 \iff x_n^2-x_n\ge 0 \iff x_n(x_n-1)\ge 0.$

Deci şirul este şi mărginit $1<x_n\le x_1=3$.

Prin urmare şirul este convergent. Notăm $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Trecem la limită în relaţia de recurenţă

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} \iff L=\sqrt{L} \implies L^2=L.$$

Obţinem $L^2-L=0 \iff L(L-1)=0$, care are soluţiile $L=1$, $L=0$.

Dar $x_n>1$, deci doar $L=1$ este acceptabilă.

Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Mai întâi $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, deci $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$.

$$\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30.

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}=\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}}=$$

$$=\frac{1-x-2+x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 40

1. Dacă $z + \frac{1}{z} = 1$, atunci $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = 1$, deci $z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} = 1$ şi $z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$ apoi $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 = (-1)^2$, deci $z^4 + 2 + \frac{1}{z^4} = 1$ şi $z^4 + \frac{1}{z^4} = -1$, în final $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) = (-1)(-1) = 1$ şi $z^6 + \frac{1}{z^2} + z^2 + \frac{1}{z^6} = 1$.

Deci $z^6 + \frac{1}{z^6} = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. Un sistem liniar omogen are o infinitate de soluţii dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este zero, deci

$$\det \begin{pmatrix} m & 4m \\ 1 & m^2 \end{pmatrix} = 0 \iff m^3 - 4m = 0 \iff m(m^2 - 4) = 0.$$

Soluţiile sunt $m = 0$. $m = 2$, $m = -2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

3. Progresia aritmetică $2, 4, 6, ...$ are raţia $r = 2$.

Primul termen se scrie $2 = 2 + 0 \cdot r$, termenii de rang par se scriu $2 + 2k \cdot 2 = 2 + 4k$, $k = 0, 1, 2, ...$

Suma primilor 100 de termeni de rang par se scrie

$$\frac{100(2 + 2 + 4 \cdot 99)}{2} = 50 \cdot 400 = 20000.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

4. Amplificăm fiecare fracţie cu conjugatul corespunzător

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} = \frac{1 + 2i - 1}{1+1} + \frac{2^2 - 4i - 1}{2^2 + 1} = i + \frac{3 - 4i}{5}.$$

Partea reală este $\frac{3}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. În dezvoltarea binomului $(4 + \sqrt{x})^7$ termenul $x^2 = (\sqrt{x})^4$ este

$$C_7^4 \left(\sqrt{x}\right)^4 \cdot 4^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} 4^3 x^2 = 7 \cdot 5 \cdot 4^3 x^2 = 2240 x^2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Din sistem deducem $\cos x = \cos y$, deci $x = y$, deoarece funcţia cosinus este injectivă pe intervalul $[0, \pi]$.

Prima ecuaţie a sistemului devine $\cos 2x = \cos x \iff 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$, o ecuaţie de gradul al doilea cu $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-1) = 9$.

Soluţiile sunt $\cos x = \frac{-(-1) \pm 3}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$, deci $\cos x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

7. Avem condiţiile $x+1 \geq 0$, $x-1 \geq 0$.

Ridicăm la puterea a doua şi obţinem $x+1+x-1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} = 4$.

Deci $\sqrt{x^2-1} = 2-x$, ridicăm din nou la puterea a doua cu condiţia $2-x \geq 0$ şi obţinem $x^2-1 = (2-x)^2$, deci $x^2-1 = 4-4x+x^2$, rezultă $x = \frac{5}{4}$, valoare care verifică toate condiţiile.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

8.

$$\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^4+2n}\right) = \left(n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}} - n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right) =$$

$$n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}} - n\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-\infty).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. Punctele B şi D au aceeaşi abscisă 4, deci BD este perpendiculară pe AB.

Triunghiul DAB este dreptunghic cu unghi drept în vârful B.

Tangenta unghiului $\widehat{DAB}$ este

$$\text{tg}(DAB) = \frac{DB}{AB} = \frac{3}{3} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

10. Ecuaţia de gradul al doilea $(3^x)^2 - 5\cdot 3^x + a = 0$ are două soluţii dacă şi numai dacă $\Delta > 0$ şi soluţiile sunt strict pozitive.

Deci $\Delta = (-5)^2 - 4a > 0 \iff a < \frac{25}{4}$.

Obţinem soluţiile $\frac{-(-5)\pm\sqrt{25-4a}}{2} = 3^x > 0$.

Deci $\frac{-5\pm\sqrt{25-4a}}{2} > 0 \iff 5-\sqrt{25-4a} > 0 \iff a > 0$.

În final $a \in \left(0, \frac{25}{4}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. Avem condiţia $x+2 \geq 0$.

Ecuaţia de gradul al doilea $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \sqrt{x+2} - 6 = 0$ are

$\Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 25.$

Soluţiile sunt

$$\sqrt{x+2} = \frac{-(-1) \pm 5}{2}, \ \sqrt{x+2} = 3, \ \ \sqrt{x+2} = -2.$$

Se acceptă doar soluţia pozitivă $\sqrt{x+2} = 3 \iff x = 7$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathrm{E}}$.

12. Transpusa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ este $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, determinantul matricei este $\det \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1$, matricea reciprocă este $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ cu inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathrm{A}}$.

13. Pentru a determina asimptotă oblică la $+\infty$ calculăm limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(3x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{3},$$

apoi calculăm limita

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{3x+1} - \frac{1}{3}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3-3x^2-x}{3(3x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{3(3x+1)} = -\frac{1}{9}.$$

Asimptota oblică este $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathrm{C}}$.

14. Derivăm $\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)' = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}\right) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathrm{D}}$.

15. Calculăm derivata funcţiei
$f'(x) = (x\mathrm{e}^{-x})' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Derivata se anulează pentru $\mathrm{e}^{-x}(1-x) = 0 \implies x = 1$.

Derivata este $\mathrm{e}^{-x}(1-x) > 0$ pentru $x < 1$ şi $\mathrm{e}^{-x}(1-x) < 0$ pentru $x > 1$, deci $x = 1$ este punct de maxim.

Răspuns corect: $\boxed{\mathrm{B}}$.

16.

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{t} \Big|_{t=x}^{t=x+1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2}{+\infty} = 0\,.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

17. Pentru $n \to \infty$ avem $\frac{1}{n} \searrow 0$. Înlocuim $\frac{1}{n} \searrow 0$ cu $x \searrow 0$ şi calculăm limita de funcţie

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^3}\left(x-\sin x\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{0}{0}.$$

Folosind regula lui l 'Hospital

$$\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \frac{1-\cos x}{3x^2}, \text{ pentru care } \lim_{x\searrow 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}.$$

Folosim din nou regula lui l 'Hospital

$$\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(3x^2\right)'} = \frac{-(-\sin x)}{3\cdot 2x} \quad \text{pentru care } \lim_{x\searrow 0}\frac{-(-\sin x)}{3\cdot 2x} = \frac{1}{6}.$$

Prin urmare limita iniţială de funcţie este

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^3}\left(x-\sin x\right) = \frac{1}{6}.$$

În particular, pentru $x \searrow 0$ de forma unui şir $x = \frac{1}{n}$ cu $n \to \infty$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. Se observă că punctul C se află pe mediatoarea segmentului AB, deci CO este înălţime în triunghiul ABC, aria triunghiului ABC este

$$\frac{AB\cdot CO}{2} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. Ecuaţia se poate scrie $\left(x^2\right)^2 - x^2 + m = 0$, care are rădăcini reale dacă şi numai dacă $\Delta = (-1)^2 - 4m \geq 0$, adică $m \leq \frac{1}{4}$.

Pentru $\Delta = 0 \iff (-1)^2 - 4m = 0$, $m = \frac{1}{4}$.

Se obţin soluţiile $x^2 = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ şi deci $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ două soluţii distincte.

Pentru $\Delta > 0 \iff (-1)^2 - 4m > 0$, $m < \frac{1}{4}$.

Se obţin soluţiile $x^2 = \frac{-(-1)+\sqrt{1-4m}}{2}$ şi $x^2 = \frac{-(-1)-\sqrt{1-4m}}{2}$, după care se obţin două soluţii distincte

$$x_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}}\,,\ x_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}}.$$

Rămân doar aceste două soluţii, numai dacă ecuaţia $x^2 = \frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$ nu are soluţii reale, ceea ce se întâmplă numai dacă

$$\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2} < 0,$$

adică

$$1-\sqrt{1-4m} < 0 \iff 1 < \sqrt{1-4m} \iff m < 0.$$

În final, ecuaţia are exact 2 soluţii distincte pentru $m \in \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup (-\infty, 0)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. Pentru $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ avem $\text{arctg}t, \text{arcctg}t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care avem $\text{arctg}t + \text{arcctg}t = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $t \in (0, +\infty)$.

Prin urmare integrala devine

$$\int_{1/2}^{3/4} (\text{arctg}t + \text{arcctg}t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{3/4} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. Pentru $f(x) = \ln(x+1)$ avem $f(0) = \ln(0+1) = 0$.

Prin urmare $f \circ f \circ f \circ f(0) = f \circ f \circ f(0) = f \circ f(0) = f(0) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

22. Mai întâi trebuie ca $x+1 > 0$, $x-1 > 0$, $x > 0$, deci $x > 1$.

Ecuaţia $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 x$ se rescrie

$$\log_2(x+1)(x-1) = \log_2 x \iff (x+1)(x-1) = x.$$

Obţinem ecuaţia $x^2 - 1 - x = 0$, pentru care $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$ şi soluţiile $x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2}$.

Ţinând seama de condiţia $x > 1$, rămâne doar soluţia $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. Dacă $\text{tg}x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$(\text{tg}x)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \iff \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{5} \text{ şi } \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. Pentru ca o funcţie să fie derivabilă, este necesar să fie continuă.

Prin urmare funcţia trebuie să fie continuă în $x = 0$, deci limitele laterale în $x = 0$ să fie egale, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0}(ax+3) = 3 = \lim\limits_{x\searrow 0}(\sin x + b) = b$, deci $b = 3$.

Apoi dacă şi limitele laterale ale derivatei în $x = 0$ sunt egale, atunci funcţia este derivabilă în $x = 0$.

Limitele laterale ale derivatei sunt $\lim\limits_{x\nearrow 0}(ax+3)' = \lim\limits_{x\nearrow 0}(a) = a = \lim\limits_{x\searrow 0}(\sin x + b)' = \lim\limits_{x\searrow 0}(\cos x) = 1$, deci $a = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

25. Pentru orice polinom $P(X)$, $P(1)$ reprezintă suma coeficienţilor.

În acest caz pentru $P(X) = (x+4)^2 - (2x-3)^5$, $P(1) = (1+4)^2 - (2\cdot 1 - 3)^5 = 5^2 + 1 = 26$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. Să observăm că $(\mathrm{e}^x \sin 2x)' = 2\mathrm{e}^x \cos 2x + \mathrm{e}^x \sin 2x$.

Deci $\int_0^\pi (2\mathrm{e}^x \cos 2x + \mathrm{e}^x \sin 2x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x \sin 2x)\big|_{x=0}^{x=\pi} = \mathrm{e}^\pi \sin 2\pi - \mathrm{e}^0 \sin 2\cdot 0 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. Să observăm că este vorba de o integrală pe un interval simetric faţă de zero $\int_{-A}^{A}$ şi că funcţia $\frac{x}{x^2+4}\ln(x^2+1)$ este o funcţie impară.

Prin urmare valoarea integralei este zero, $\int_{-4}^{4} \frac{x}{x^2+4}\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

28.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^3 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. Primitive de acest tip se pot determina folosind integrare prin părţi.

Integrăm de două ori prin părţi.

Mai întâi integrăm e^x şi derivăm $\cos x$

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x - \int \left(\int \mathrm{e}^x \right) (\cos x)' \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x (-\sin x) \mathrm{d}x,$$

apoi integrăm din nou prin părţi.

Integrăm e^x şi derivăm $\sin x$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x.$$

Obţinem

$$2 \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x.$$

Deci

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x \right) + C.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

30. Folosim regula lui l'Hospital, deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - \mathrm{tg} x}{x} = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{(x \sin x - \mathrm{tg} x)'}{(x)'} = \sin x + x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\sin x + x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) = -1.$$

Deci valoarea limitei iniţiale este

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - \mathrm{tg} x}{x} = -1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

Varianta 41

1. $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2} - 2\left|3-\sqrt{2}\right| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = \left|2\sqrt{2}-3\right| - 2\left|3-\sqrt{2}\right| + \sqrt{2}^4 = 3 - 2\sqrt{2} - 6 + 2\sqrt{2} + 4 = 1.$

$2\sqrt{2} < 3$ deoarece $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 < 9 = 3^2$, rezultă că $\left|2\sqrt{2}-3\right| = 3 - 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

2. $b_{2023} = b_{2020} \cdot q^{2023-2020}$, unde q este raţia progresiei.

Deci, $q^3 = 64$, de unde $q = 4$. Deci:

$b_{2021} = b_{2020} \cdot q$, adică $b_{2021} = 200$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. Cazuri posibile: $100, 101, 102, ...999$, care sunt în număr de 900.

Cazuri favorabile: numerele pare: $100, 102, 104, ...998$ care sunt în număr de $\frac{998-100}{2} + 1 = 450$.

Numerele divizibile cu $5:\ 100, 105, 110, 115, ...995$ care sunt în număr de $\frac{995-100}{5} + 1 = 180$.

Trebuie să scădem numerele care se termină cu cifra zero (adică 100, 110, 120, ..., 990, care sunt în număr de $\frac{990-100}{10} + 1 = 90$), deoarece acestea au fost numărate deodată cu numerele pare.

Deci: numărul cazurilor favorabile este: $450 + 180 - 90 = 540$.

$P = \frac{540}{900} = 0,6$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

4. Pentru funcţia de gradul al doilea $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4A}, \infty\right)$, deci $a = -\frac{\Delta}{4A}$, adică $a = -\frac{1}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. $|z^4| = |z|^4 = |2+2i|^4 = \sqrt{2^2+2^2}^4 = 64$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, $MN = \frac{BC}{2}$, $MN = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. Vectorii $\overrightarrow{u} = (a+1)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = (a+2)\overrightarrow{i}$ sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este 0. Deci:

$(a+1) \cdot (a+2) + 2 \cdot 0 = 0$, adică $a = -1$ sau $a = -2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

8. Mijlocul segmentului AB este $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, iar simetricul faţă de originea axelor de coordonate este $N\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, care are abscisa $-\frac{1}{2.}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$
$\cos x = \pm\frac{4}{5}$.
Cum $x \in \left(\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right) = \left(2\pi + \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$, rezultă că $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

10. $X = A^{-1} \cdot B$, deci
$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. $\det\left(A^2\right) = (\det A)^2 = (1-3a)^2$
$(1-3a)^2 = 4 \Longrightarrow 1 - 3a = \pm 2$, deci $a = \frac{-1}{3}$ sau $a = 1$. Cum a este număr natural $\Longrightarrow a = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

12. $xy - 4x - y + 5 = xy - 4x - y + 4 + 1 = (x-1)(y-4) + 1$
deci $1 \circ y = 1 \Longrightarrow 1 \circ 2 \circ 3 \circ .... \circ 2023 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

13. $x \circ e = xe - 3x - 2e + 8$, $xe - 3x - 2e + 8 = x \Rightarrow e(x-2) = 4(x-2)$ pentru orice x, deci $e = 4$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

14. Sistemul este:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$d = \det A = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ sistem de tip Cramer, deci:
$x_i = \frac{d_i}{d}, i = \overline{1,3}$
$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
Deci soluţia sistemului este $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. $f(-1) = (-1)^{n^2+n} - (-1)^{2n+1} + 1$, dar $n^2 + n = n(n+1)$ este par. Deci $f(-1) = 3$,

$f(0) = 0^{n^2+n} - 0^{2n+1} + 1,\ f(0) = 1,$
$f(1) = 1^{n^2+n} - 1^{2n+1} + 1,\ f(1) = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

17. Din relatiile lui Viète avem $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1$. Cum $x_1 \cdot x_2 = 1$, avem $x_3 = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(3n^2+n\right)}{3n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+n} \cdot \sin\left(3n^2+n\right)$.

Cum $\left(\sin\left(3n^2+n\right)\right)_n$ este marginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+n} \cdot \sin\left(3n^2+n\right) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+3^x+5^x}{1+2^x+7^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x\left(\frac{1}{5^x}+\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)}{7^x\left(\frac{1}{7^x}+\left(\frac{2}{7}\right)^x+1\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^x \frac{\frac{1}{5^x}+\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}{\frac{1}{7^x}+\left(\frac{2}{7}\right)^x+1} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

20. $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 1 \Longrightarrow$dreapta de ecuatie $y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \pm\infty \Longrightarrow$ dreapta de ecuatie $x = 1$ este asimptotă verticală.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \pm\infty \Longrightarrow$ dreapta de ecuatie $x = 2$ este asimptotă verticală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $f'(x) = \left(\ln\left(x^2+x+1\right) - \sin(2x)\right)' = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \cos(2x)(2x)' = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 2\cos(2x),\ f'(0) = \frac{2\cdot 0+1}{0^2+0+1} - 2\cos(2\cdot 0) = 1 - 2 = -1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = a$

$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$, deci $a = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } x < 0, \\ x^2e^x + 2xe^x + b, \text{ pentru } x > 0, \end{cases}$$

$f_s'(0) = 0,$

$f_d'(0) = b$, deci $b = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. $\int\limits_1^e \frac{x^2+x+1}{x}dx = \int\limits_1^e \frac{x^2}{x}dx + \int\limits_1^e \frac{x}{x}dx + \int\limits_1^e \frac{1}{x}dx = \int\limits_1^e x dx + \int\limits_1^e 1 dx + \int\limits_1^e \frac{1}{x}dx =$

$= \frac{x^2}{2}/_1^e + x/_1^e + \ln x/_1^e = \frac{e^2-1}{2} + e - 1 + \ln e - \ln 1 = \frac{e^2+2e-1}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $\int\limits_0^1 |e^x (x-1)|\, dx = \int\limits_0^1 e^x (1-x)\, dx =$

$= \int\limits_0^1 (e^x)' (1-x)\, dx = e^x (1-x) /_0^1 - \int\limits_0^1 e^x (1-x)'\, dx = -1 + e^x/_0^1 =$

$= -1 + e - 1 = e - 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_2^n \frac{1}{x(x-1)} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_2^n \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \lim\limits_{n\to\infty} \left((\ln(x-1) - \ln x)/_2^n\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{x-1}{x}/_2^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{2-1}{2}\right) = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. $\int\limits_0^2 f(x)\, dx = \int\limits_0^1 x dx + \int\limits_1^2 x^2 e^x dx = \frac{x^2}{2}/_0^1 + x^2 e^x/_1^2 - \int\limits_1^2 2xe^x dx =$

$= \frac{1}{2} + 4e^2 - e - 2xe^x/_1^2 + 2e^x/_1^2 =$

$= \frac{1}{2} + 4e^2 - e - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 2e = 2e^2 - e + \frac{1}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\, dx = \int\limits_0^1 x' \ln(x+1)\, dx = x\ln(x+1)/_0^1 - \int\limits_0^1 x\left(\ln(x+1)\right)' dx =$

$= \ln 2 - \int\limits_0^1 x\frac{1}{x+1} dx = \ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \ln 2 - x/_0^1 + \ln(x+1)/_0^1 =$

$= 2\ln 2 - 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$

29. $F'(x) = \sin x^2 \Rightarrow F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. $\int\limits_0^1 |2x-1| = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\, dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\, dx = -2\frac{x^2}{2}/_0^{\frac{1}{2}} + x/_0^{\frac{1}{2}} +$

$2\frac{x^2}{2}/_{\frac{1}{2}}^1 - x/_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 42

1. Amplificăm fiecare fracţie cu conjugata:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}+$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)}+\cdots+\frac{\sqrt{1058}-\sqrt{1057}}{\left(\sqrt{1057}+\sqrt{1058}\right)\cdot\left(\sqrt{1058}-\sqrt{1057}\right)}=$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{1058}-\sqrt{1057}=$$

$$\sqrt{1058}-\sqrt{2}=23\sqrt{2}-\sqrt{2}=22\sqrt{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $x^2-4x+y^2-6y+13=0$
$x^2-4x+4+y^2-6y+9=0$
$(x-2)^2+(y-3)^2=0$
Deci $x=2, y=3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

3. $|x-2|\le 3 \Longleftrightarrow -3\le x-2\le 3 \Longleftrightarrow -1\le x\le 5$.
Deci $A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$.
$x^3+x^2-2x-2=0 \Longleftrightarrow (x+1)\left(x^2-2\right)=0$.
$B=\left\{-1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\right\} \Rightarrow A\cap B=\{-1\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

4. $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ adică $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$
f este injectivă pe orice mulţime inclusă în intervalul $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. Notăm $\sqrt{4-x}=u, \sqrt{x-3}=v$.
Rezultă $\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+v^2=1, \end{cases}$ de unde $u\cdot v=0$, deci $u=0$ sau $v=0$, adică $x=4$ sau $x=3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

6. Punctele B si C se află pe axa OX, iar punctul A pe axa OY. Se observă că triunghiul ΔABC este isoscel (AO este mediană şi înălţime).

Deci, centrul de greutate G se va găsi pe AO, adică pe OY, la o treime de bază. Cum $AO=6$, rezultă $GO=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

7. Vectorii sunt paraleli dacă $\frac{a+1}{a+2}=\frac{2}{3}$, de unde $a=1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

8. Fie C(x_C, y_C). Punctul B este mijlocul segmentului AC. Rezultă că $\frac{x_C-3}{2} = 4$, $\frac{y_C+5}{2} = -1$. Deci $x_C = 11$, $y_C - 7$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

9. $180° - (23°15' + 80°50') = 180° - 104°5' = 179° + 60' - 104° - 5' = 75°55'$, $23°+80° = 103°$, $15'+50' = 65' = 60'+5' = 1°5'$, $23°15'+80°50' = 104°5'$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $X = B \cdot A^{-1}$, deci $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

Tr(X) (urma matricei X) este suma elementelor de pe diagonala principală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

11. $\det(A(a) \cdot A(b)) = \det(A(a)) \cdot \det(A(b)) = (1-3a)\cdot(1-3b)$

Cum a şi b sunt numere naturale, rezultă că $1-3a$ şi $1-3b$ sunt numere întregi, deci avem două posibilităţi:

$1-3a = 1$ şi $1-3b = 1$ de unde $a = b = 0$.

sau

$1-3a = -1$ şi $1-3b = -1$ care nu are soluţii naturale.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Relaţiile lui Viète:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$,

$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = -1$,

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -3$.

Deci $x \circ y = xy + 3x - 3y - 6$,

$x \circ y = x(y+3) - 3(y+3) + 3$,

$x \circ y = (x-3)(y+3) + 3$.

Observăm că $3 \circ y = 3$, prin urmare:

$3 \circ 4 \circ 5 \circ \cdots \circ 2024 = 3 \circ 5 \circ \cdots \circ 2024 = \cdots = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

13. Inversiunile sunt: $(1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

14. Sistemul este:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$d = \det A = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ sistem de tip Cramer, deci:

$x_i = \frac{d_i}{d}, i = \overline{1,3}$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Deci soluţia sistemului este $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

16. Potrivit teoremei lui Bézout restul împărţirii este $f(-1)$.

Dar $f(-1) = (-1)^{n^2+n} - (-1)^{2n+1} - 1 - 1$ şi cum $n^2 + n = n(n+1)$ este par, rezultă $f(-1) = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

17. Din relaţiile lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = -1$. Cum $x_1 = -x_2$ rezultă că $x_3 = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

18. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Deci:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{(1+x)^7-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{x} \cdot \frac{x}{(1+x)^7-1}$.

Cum $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = r$, rezultă:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{x} \cdot \frac{x}{(1+x)^7-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{(1+x)^7-1}{x}} = \frac{5}{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

20. $x + 2 \neq 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \pm\infty \Longrightarrow$nu există asimptote orizontale la $+\infty$ sau la $-\infty$.

Căutăm asimptote oblice:

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x} = 1$.

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - x\right) =$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2-2x}{x+2} = -2$.

Deci, dreapta de ecuaţie $y = x - 2$ este asimptotă oblică.

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x+2} = \pm\infty$, deci dreapta de ecuaţie $x = -2$ este asimptotă verticală.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

21. $f'(x) = ((3+\sin x)\ln(x^2+1))' =$
$(3+\sin x)'\ln(x^2+1) + (3+\sin x)\ln(x^2+1)'$,
$f'(x) = \cos x\ln(x^2+1) + (3+\sin x)\frac{2x}{x^2+1}$,
$f'(0) = \cos 0\ln(0^2+1) + (3+\sin 0)\frac{0}{0+1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x<0}(x+a) = a$

$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0}\frac{\sin(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x>0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3 = 3.$

Pentru ca f să fie continuă în 0, rezultă că $a = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

23. $$\int_0^1 \sqrt{4x^2-4x+1}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(2x-1)^2}\,dx = \int_0^1 |2x-1|\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\,dx = \left(x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $$\int_0^1 \left|\frac{x^2-x}{x^2-x+1}\right| dx = \int_0^1 \frac{x-x^2}{x^2-x+1}dx = -\int_0^1 \frac{x^2-x+1-1}{x^2-x+1}dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = -x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\text{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg|_0^1 = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \text{arctg}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = -1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = -1 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+2^3+...+2^n}{1+3+3^2+3^3+...+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}{\frac{3^{n+1}-1}{3-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\frac{2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

26. Deoarece x tinde la $\frac{3}{2}$, putem presupune că $x\in(1,2)$, deci $[x]=1$, iar $|x-2|=2-x$.

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{[x]+x}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{1+x}{2-x}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{e}f(x)\,dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}xdx+\int\limits_{1}^{e}x\ln xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_{1}^{e}-$$

$-\int\limits_{1}^{e}\frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{e^2}{2}-\int\limits_{1}^{e}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3}{8}+\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right|_{1}^{e}=\frac{5+2e^2}{8}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

28. Observăm că functia $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+1}$ este impară, deci $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin x}{x^2+1}dx=0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

29. Aplicăm formula Leibniz-Newton, apoi regula lui l'Hospital:

$\int\limits_{0}^{x^2}e^{-t^2}dt=F(x^2)-F(0)$, unde F este o primitivă pentru $f(x)=e^{-x^2}$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int\limits_{0}^{x^2}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F\left(x^2\right)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(F\left(x^2\right)-F(0)\right)'}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xe^{-x^2}}{2x}=1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

30. Vom face schimbarea de variabilă $x^2=t$, apoi folosim formula de integrare prin părţi:

$$\int\limits_{0}^{1}x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}te^tdt=\left.\frac{1}{2}te^t\right|_{0}^{1}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}e^tdt=\frac{e}{2}-\left.\frac{1}{2}e^t\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

Varianta 43

1. $S_{40} = 2\frac{3^{40}-1}{3-1} = 3^{40} - 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

2. $D_1 = [-3(b+1)]^2 - 4(1+b) = 9b^2 + 14b + 5$, $b_1 = -1$, $b_2 = -\frac{5}{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

3. Amplificăm cu $1 + \sqrt{5}i$ şi obţinem

$z = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i, |z| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

4. $\ln \frac{5x+6}{3x+1} = \ln e^1$, $\frac{5x+6}{3x+1} = e$, $x = \frac{e-6}{5-3e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

5. $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(\frac{6}{\sqrt{x}}\right)^k$, $\frac{x^{6-k}}{x^{\frac{k}{2}}} = x^3$, $k = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

6. Fie M mijlocul segmentului AB. Atunci $M(-1,2)$ şi $BM = \sqrt{(-1+3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

7. $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\cos x = \frac{1}{2}$,

$2\sin x + 6\cos x = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 6(\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

8. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, (m-3)(m-1) + 4(\frac{1}{4}) = (m-2)^2 = 0$, $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

9. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{AC}{\sin B} = 4 = 2R$, $R = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $(f \circ f)(x) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1$, $(f \circ f)(2) = 26$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

11. Notăm $3^x = t$. Ecuaţia devine $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = 1$, deci $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

12. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. $\lim\limits_{x \to 3, x > 3} f(x) = \frac{(2)3+1}{9-9} = \frac{7}{(+0)} = +\infty$, $x = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

14. Integrăm prin părţi $\displaystyle\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + C$,
$\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = (e-e) - (0-1) = 0+1 = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. $f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$. Din $f'(x) = 0$, $x = 0$ şi din tabelul de variaţie rezultă că $x = 0$ este un punct de minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

16. $f'(x) = 6x^2 - 6x + 1$, $(f'(x))' = 12x - 6 = 0$, deci $x = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x = \ln(x^2+16)\Big|_0^1 = \ln 17 - \ln 16 = \ln\frac{17}{16}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

18. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+9x-18}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+9)}{x-2} = 2^2+9 = 13.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

19. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx + 5\int\frac{dx}{x^2+4} =$
$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

20. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, $f'(x) = 3$, $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

21. Aplicăm regula triunghiului sau regula lui Sarrus pentru calculul determinantului.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

22. $\displaystyle\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{5}{7}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. $x\circ e = x,\ xe - 2x - 2e + 6 = x,\ e = \frac{3(x-2)}{x-2},\ e = 3.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, $f'(x) = e^x+1$, $y-1 = 2(x-0)$. Deci $y = 2x+1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

25. Aducem la acelaşi numitor şi avem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1}-\frac{x^2-2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2-1}=6.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. Ecuatia devine $2(x^2+\frac{1}{x^2})+3(x+\frac{1}{x})+4=0$. Dacă notăm $(x+\frac{1}{x})=y$, atunci $(x^2+\frac{1}{x^2})=y^2-2$ şi avem $y_1=0$, $y_2=-\frac{3}{2}$. Atunci obţinem $x_1=-i$, $x_2=i$, $x_3=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$, $x_4=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$. Rezultă

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+x_4=1+1+\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{7}{16}}+\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{7}{16}}=1+1+1+1=4.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

27. $10T9T8\cdots T3=b$, $bT2=2$, $2T1=2$, $2T0=2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Cum $F'(x)=f(x)=(x^2-4x+3)e^x$, din tabelul de variaţie rezultă că în $x=1$ avem un maxim iar în $x=3$ avem un minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$

29. $$\int\frac{x^2+3}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x^2+1}dx=x+2\text{arctg }x+C.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. $$\int\frac{x\sqrt{x^2+4}+2}{x^2+4}dx=\int\frac{x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx$$

$$=\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=\sqrt{x^2+4}+\text{arctg }\frac{x}{2}+C.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

Varianta 44

1. $z = \frac{(3+i)^2+(3-i)^2}{(3-i)(3+i)} = \frac{16}{10}$, $z^2 = \frac{256}{100}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

2. $x_M = 2$, $y_{_M} = 3$, $d(M, C) = 4\sqrt{2}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

3. $f(1) = 0$, $a = 5$, $f(0) = 5$, $B(0, 5)$, $G_f \cap Oy = \{B\}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

4. $m = 2$, $d : y = mx + n$, $A \in d$, deci $n = -1$; $d : y = 2x + (-1)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

5. Folosind tabelul de variaţie avem $x \in (1, \frac{3}{2}] \cup (2, +\infty)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

6. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos x = \frac{-\sqrt{7}}{4}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

7. $(x + 1)(5x + 7) = 0$; $x = -1$; $x = -\frac{7}{5}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

8. $\overrightarrow{v_1} = b\overrightarrow{v_2}$; $2 = 3ab; 7 = 4b$; $b = \frac{7}{4}$; $a = \frac{8}{21}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

9. $5^x = t$; $x = 0$; $x_2 = 1 - \log_5 2$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

10. $a_1 = 3$; $q = 5$; $S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{3}{4}(5^8 - 1)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

11. $z = \frac{(6+7i)(5-4i)}{25-16i^2} = \frac{58}{41} + \frac{11}{41}i$; $|z| = \sqrt{(\frac{58}{41})^2 + (\frac{11}{41})^2} = \frac{\sqrt{3485}}{41}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

12. Folosind tabelul de variaţie $x \in (-2, 0]$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

13. $f(0) = 4$, $f(2) = 8$, $b = 4, a = 0$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

14. $S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, $a_1 = i$, $q = i$, $S = \frac{2i}{1-i}$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

15. Folosim tabelul de variaţie pentru $\frac{x+12}{x-3} < 0$, $x \in [-12, 3)$.
Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

16. $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v}$, $x = \frac{6}{7}$, $k = \frac{18}{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

17. $AB = BC = CA, C(x,y)$, $5 = x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$, $C_1(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2})$, $C_2(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

18. $\sin(45° + 30°) + 3\sin(60° + 45°) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

19. $z_1 + z_2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 6 + 3i + 8 + 9i + (6-3i)(8-9i) = 11 - 66i$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

20. $7\sqrt{2} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} =$
$7\sqrt{2} + \left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = 9\sqrt{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

21. $AB : y = 2x - 2$, $d : y = mx + n$, $m = 2$, $C \in d \Longrightarrow -3 = 4 + n$ $\Longrightarrow n = -7$, $d : y = 2x - 7$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

22. Folosind tabelul de variaţie $x \in [-3, \frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

23. $\frac{2}{3} < 1$, $x + 2 > -2x + 9$, $x > \frac{7}{3}$, $x \in (\frac{7}{3}, +\infty)$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

24. $AC^2 = (6\,\text{cm})^2 + (7\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 6\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot \frac{1}{2} = 43\,\text{cm}^2, AC = \sqrt{43}\,\text{cm}$. Aplicând teorema sinusurilor, avem $\frac{AC}{\sin B} = \frac{\sqrt{43}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Longrightarrow R = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

25. $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)dx = (-xe^x + 2e^x)\big|_{-2}^{1} + (xe^x - 2e^x)\big|_{1}^{2}$ $= 2e - 4e^{-2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_{3x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x - 11\ln\frac{|4x+5|}{|3x+5|}}{x} = 3 - 11\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left|\frac{4x+5}{3x+5}\right|}{x} =$
$= 3 - 11\ln \lim\limits_{x\to 0}(\frac{4x+5}{3x+5})^{\frac{1}{x}} = 3 - 11\ln e^{\frac{1}{5}} = 3 - \frac{11}{5} = \frac{4}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{C}}$.

27. $\lim\limits_{x\searrow 4} \dfrac{f(x) - 12}{x - 4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{e^{x-4} - 1}{x - 4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{e^{x-4}}{1} = e^0 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{E}}$.

28. Cum $F'(x) = f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$, din tabelul de variaţie rezultă că în $x = 1$ avem un maxim, iar în $x = 3$ avem un minim.

Răspuns corect: $\boxed{\text{B}}$.

29. Avem $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [-3, -2]$ şi aria este

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} (e^x + 1)dx = (e^x + x)\Big|_{-3}^{-2} = 1 + e^{-2} - e^{-3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{D}}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{A}}$.

CAPITOLUL 3

Subiectele date la examenul de admitere 2023

1. Enunţurile subiectelor date la examenul de admitere 2023

1. (3p) Se consideră progresia aritmetică 2, 4, 6,... Suma primilor 50 de termeni ai acestei progresii este:

A 2450; B 2500; C 2550; D 5100; E 4900.

2. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 1 - a$. Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f are un singur punct comun cu axa Ox este:

A $\{-2, -1\}$; B $\{0, 1\}$; C $\{-1, 2\}$; D $\{2\}$; E $\{-1\}$.

3. (3p) Valoarea modulului numărului complex $z = \dfrac{2 + \sqrt{6}i}{2 - \sqrt{6}i}$ este:

A $\frac{1}{5}$; B $\frac{2}{5}$; C 2; D 3; E 1.

4. (3p) Soluţia ecuaţiei $\lg(-3x + 23) = \lg(2x) + 1$ este:

A 6; B $\frac{1}{2}$; C 2; D 1; E 0.

5. (3p) Coeficientul termenului care îl conţine pe x^4 în dezvoltarea $\left(x + \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ este:

A $C_8^3 8^3$; B $C_8^4 8^4$; C $C_8^2 8^2$; D $C_8^5 8^5$; E $C_8^6 8^6$.

6. (3p) Valoarea sumei $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 9C_n^2 + 27C_n^3 + \cdots + 3^n C_n^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este:

A 2^n; B 0; C n; D 3^n; E 4^n.

7. (3p) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\,(2,0)$, $B\,(0,2)$ şi $C\,(2,2)$. Simetricul punctului C faţă de dreapta AB este punctul:

A $(1,1)$; B $(1,-1)$; C $(0,0)$; D $(-1,-1)$; E $(-1,1)$.

8. (3p) Dacă $BC = 10$, $AB = 6$ şi $AC = 8$, atunci raza cercului înscris în triunghiul ABC este:

A 2 B $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C $\sqrt{2}$ D 1 E $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. (3p) Soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = \sin x$, care aparţin intervalului $[0, 2\pi]$, sunt:

A $0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$; B $0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi$; C $\dfrac{\pi}{3}$; D $0,\ \dfrac{\pi}{3},\ 2\pi$; E $0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ 2\pi$.

10. (3p) Aflaţi numărul x natural astfel încât $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 155$.

A 16; B 25; C 31; D 29; E 39.

11. (3p) Determinaţi numărul real x, ştiind că aria triunghiului ABO de vârfuri $A(x, 1)$, $B(2x, -1)$, $O(0, 0)$ este 3.

A 2; B 5; C ± 2; D 1; E $\sqrt{3}$;

12. (3p) Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-1} = 5 - 2x$ este:

A $\{2\}$; B $\left\{2, \dfrac{13}{4}\right\}$; C $\left\{\dfrac{13}{4}\right\}$; D $\{1\}$; E $\{10\}$.

13. (3p) Fie polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că $1 - i$ este radăcină a polinomului f.

A $a = 12,\ b = 0$; B $a = -4,\ b = 6$; C $a \in \mathbb{R},\ b \geq 0$; D $a = 0,\ b \in \mathbb{R}$; E $a = 0,\ b = 12$.

14. (3p) Derivata funcţiei $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ în punctul $x_0 = 0$, $f'(0)$, este:

A 1; B $\ln 2$; C 0 D -1; E $\frac{1}{2}$.

15. (3p) Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + mx - 2 = 0$, cu $m \in \mathbb{R}$, atunci avem:

A $x_1 > x_2 > 0$; B $x_1 < 0 < x_2$; C $x_1 < x_2 < 0$;
D $x_1 \leq x_2 \leq 0$; E $x_1 = x_2 = 0$.

16. (3p) Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este:

A $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
D $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; E $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

17. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + x^2\right) \mathrm{d}x$ este:

A $\mathrm{e} - \frac{1}{3}$; B $\mathrm{e} - \frac{2}{3}$; C $\mathrm{e} + \frac{1}{3}$; D $\mathrm{e} + \frac{2}{3}$; E $\mathrm{e} + 1$.

18. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x - 1}$ este:

A ∞; B -1; C 0; D 1; E $-\infty$.

19. (3p) Valoarea determinantului matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ este:

A 2 B 0 C -2 D 1 E -1

20. (3p) Valoarea integralei $\int_0^1 \dfrac{x+2}{x^2-4} \mathrm{d}x$ este:

A $\ln 2$; B $-\ln 4$; C $-\ln 2$; D $\ln 4$; E 0.

21. (3p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Numărul natural n pentru care $(\det(A))^n = 256$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 11; $\boxed{\text{B}}$ 6; $\boxed{\text{C}}$ 10; $\boxed{\text{D}}$ 8; $\boxed{\text{E}}$ 12.

22. (3p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Tangenta la graficul funcţiei f, care este paralelă cu axa Ox, are ecuaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $y = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $y = \frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $y = 1$; $\boxed{\text{D}}$ $y = 2$;
$\boxed{\text{E}}$ $y = -1$.

23. (3p) Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\mathrm{tg}\, x - 2x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ ∞; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

24. (3p) Soluţia unică a sistemului liniar $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(1, -1, -1)$; $\boxed{\text{B}}$ $(-1, 1, -1)$; $\boxed{\text{C}}$ $(1, 1, -1)$;
$\boxed{\text{D}}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

25. (3p) Dacă se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + 5X + 2$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, atunci valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ 14; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 5; $\boxed{\text{E}}$ 3.

26. (3p) Calculaţi limita

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ e; $\boxed{\text{D}}$ -1; $\boxed{\text{E}}$ $-\infty$.

27. (3p) Partea întreagă a numărului $I = \int_{2022}^{2023} \frac{x}{x^3 + 2} \mathrm{d}x$ are valoarea:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ 2022; $\boxed{\text{D}}$ 2023; $\boxed{\text{E}}$ 2.

28. (3p) Dacă $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$, unde a, $b > 0$, atunci valoarea produsului ab este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{4}$.

29. (3p) Valoarea integralei $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ -1; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

30. (3p) Valoarea limitei $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)(x-\ln x)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ ∞; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 2; $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{2}$.

2. Răspunsurile corecte de la examenul de admitere 2023

1. $\boxed{\text{C}}$
2. $\boxed{\text{B}}$
3. $\boxed{\text{E}}$
4. $\boxed{\text{D}}$
5. $\boxed{\text{A}}$
6. $\boxed{\text{E}}$
7. $\boxed{\text{C}}$
8. $\boxed{\text{A}}$
9. $\boxed{\text{B}}$
10. $\boxed{\text{D}}$
11. $\boxed{\text{C}}$
12. $\boxed{\text{A}}$
13. $\boxed{\text{B}}$
14. $\boxed{\text{D}}$

15. $\boxed{\text{B}}$

16. $\boxed{\text{D}}$

17. $\boxed{\text{B}}$

18. $\boxed{\text{D}}$

19. $\boxed{\text{A}}$

20. $\boxed{\text{C}}$

21. $\boxed{\text{D}}$

22. $\boxed{\text{C}}$

23. $\boxed{\text{D}}$

24. $\boxed{\text{D}}$

25. $\boxed{\text{B}}$

26. $\boxed{\text{D}}$

27. $\boxed{\text{B}}$

28. $\boxed{\text{A}}$

29. $\boxed{\text{C}}$

30. $\boxed{\text{A}}$

Bibliografie

[1] M. Becheanu, Gh. Grigore, S. Ianuş, I. Ichim, *Probleme de algebră, analiză matematică şi geometrie*, 173 de teste pentru învăţământul preuniversitar şi admitere în învăţământul superior, Editura Cartea Românească, Bucureşti, 1991.

[2] Ion Cuculescu (coordonator) ş.a., *Culegere de probleme pentru admitere în învăţământul superior - matematică, fizică, chimie*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.

[3] D. Duca, E. Copaciu, Gh. Lobonţ, *Analiză matematică, clasele XI-XII, pentru grupele de excelenţă*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010.

[4] F. Dumitrel, *Probleme de analiză matematică pentru clasa a XI-a*, Editura Art, 2013.

[5] F. Dumitrel, *Probleme de analiză matematică pentru clasa a XII-a*, Editura Grafix, 2017.

[6] Al. Leonte, I. Vârtopeanu, *Bacalaureat, Probleme de matematică*, Editura Star Trafic, Craiova, 1991.

[7] I. Petrică, I. Lazăr, *Probleme de algebră pentru liceu, Vol. I, II, III*, Editura Petrion, 1995.

[8] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de analiză matematică, Vol. I şi II*, Editura Petrion, 1995.

[9] P. Stavre, F. Munteanu, L. Popescu, V. Slesar, *Probleme de algebră şi analiză matematică (teste grilă pentru admitere)*, Editura Universitaria, Craiova, 2000.

[10] O. Stănăşilă (coordonator) ş.a., *Probleme de matematică, fizică şi chimie date la concursurile de admitere în învăţământul superior în anii 1978-1979*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[11] O. Stănăşilă (coordonator) ş.a., *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învăţământul superior - matematică, fizică, chimie*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

[12] C. Vladimirescu, F. Munteanu, M.-M. Boureanu, D. Constantinescu, C. Dăneţ, A. Florea, L. Temereancă, G. Popescu, C. Şterbeţi, D. Bălă, 101 *Teste pentru Proba Scrisă la Matematică a Examenului de Admitere la Licenţă la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică*, Editura Universitaria, Craiova, 2018.

[13] I. Vladimirescu, D. Buşneag, Al. Leonte, *Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior şi perfecţionarea profesorilor de matematică din învăţământul preuniversitar*, Editura Sitech, Craiova, 1993.

[14] *Colecţia Gazeta Matematică, Seria B.*

[15] *Manualele şcolare de matematică, clasele IX–XII, ediţiile 1978–2023.*

[16] *Variantele oficiale de subiecte şi subiectele date la examenul naţional de bacalaureat, publicate de Ministerul Educaţiei Naţionale în perioada 2008–2023.*

ISBN 978-606-14-2002-5