BAREM DE EVALUARE SI NOTARE

Se acordă din oficiu 10 puncte. Fiecare din cele trei subiecte este notat cu 30 de puncte. Punctajul total maxim este de 100 de puncte.
Nota lucrării se obţine prin împărţirea punctajului total la 10.

Modelul 4

SUBIECTUL I.	30 p
1.	5 p
$z-1=-i$	1 p
$i^2=-1$	1 p
$(-i)^3=i$	1 p
$(z-1)^{2015}=i$	2 p
2.	5 p
$x_1+x_2=9$	1 p
$x_1x_2=18$	1 p
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=45$	1 p
$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{5}{2}$	2 p
3.	5 p
Substituţia $7^x=t$	1 p
Obţinerea ecuaţiei $t^2-3t+2=0$	1 p
Obţinerea rădăcinilor $t_1=1$, $t_2=2$	1 p
Obţinerea rădăcinilor reale $x_1=0$ şi $x_2=\log_7 2$	2 p
4.	5 p
Numărul submulţimilor este C_5^4	2 p
$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	1 p
$C_5^4=1$	2 p
5.	5 p
Coordonatele centrului de greutate $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$	3 p
$x_G=2$, $y_G=3$	2 p
6.	5 p
$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$	2 p
$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1 p
$\text{tg }\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	2 p
SUBIECTUL II.	30 p
1.	15 p
a) Pentru orice $x,\, y\in(-1,1)$ avem $1+xy>0$	1 p
$\frac{x+y}{1+xy}+1=\frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}>0,\ \forall x,\, y\in(-1,1)$	2 p
$\frac{x+y}{1+xy}-1=\frac{(1-x)(y-1)}{1+xy}<0,\ \forall x,\, y\in(-1,1)$	2 p
b) Asociativitatea: $\forall x,y,z\in G=(-1,1)$ avem $x*(y*z)=(x*y)*z$	2 p
Comutativitatea: $\forall x,y\in G=(-1,1)$ avem $x*y=y*x$	1 p
Elementul neutru $e=0\in G$: $\forall x\in G=(-1,1)$ avem $x*0=0*x=x$	1 p
$\forall x\in G$, $\exists x'=-x\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=0$	1 p
c) $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)$	1 p
Pentru orice $x\in G=(-1,1)$ avem $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	1 p
f este morfism de grupuri: $f(x*y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in G$	1 p

f este strict crescătoare, deoarece $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0, \forall x \in G$ 1 p
f este izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbf{R}, +)$ 1 p
2. 15 p
a) Matricea sistemului este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2 p
$\det A = 0$ 1 p
Avem minorul de ordinul doi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 1 p
Rangul matricii A este egal cu 2 1 p
b) $(0, 0, 0)$ este soluţia banală (nulă) a acestui sistem liniar omegen 3 p
O altă soluţie este $(0, 1, 1)$ 2 p
c) Soluţia generală a sistemului este $(0, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ 2 p
Dacă $(0, \lambda_1, \lambda_1)$, $(0, \lambda_2, \lambda_2)$ sunt două soluţii pentru sistemul liniar, atunci tripletul $(0, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)$ verifică fiecare ecuaţie a sistemului, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 3 p
SUBIECTUL III. 30 p
1. 15 p
a) $f'(x) = \ln x(\ln x + 2)$ 1 p
$f'(x) > 0$, pentru $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ şi $f'(x) < 0$, pentru $x \in (e^{-2}, 1)$ 2 p
f este strict crescătoare pe $(0, e^{-2})$ şi pe $(1, \infty)$ 1 p
f este strict descrescătoare pe $(e^{-2}, 1)$ 1 p
b) $f(1) = 0,\ f'(1) = 0$ 2 p
Ecuaţia tangentei în $M(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 2 p
Ecuaţia tangentei în $M(1, 0)$ este $y = 0$ 1 p
c) $\int\limits_e^{e^2} x \ln x \, dx = \int\limits_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \, dx =$ 2 p
$= \frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \int\limits_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$ 2 p
Integrala este egală cu $\frac{3e^4 - e^2}{4}$ 1 p
2. 15 p
a) $f'(x) = (2n + 1)x^{2n} + 1$ pe $\forall x \in \mathbf{R}$ 2 p
$f'(x) > 0$ pe $\mathbf{R}$ implică f strict crescătoare 3 p
b) $\int\limits_0^1 (f(x) - x^{2n+1})\, e^x \, dx = \ xe^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x \, dx = 1$ 3 p
Limita este $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ 2 p

c) Volumul corpului de rotaţie este $V(C_g) = \pi \int\limits_1^2 (g(x))^2 \, dx$ 2 p
$V(C_g) = \pi \int\limits_1^2 x^2 \, dx$ 2 p
$V(C_g) = \frac{7\pi}{3}$ 1 p

BAREM DE EVALUARE SI NOTARE

Se acordă din oficiu 10 puncte. Fiecare din cele trei subiecte este notat cu 30 de puncte. Punctajul total maxim este de 100 de puncte.
Nota lucrării se obţine prin împărţirea punctajului total la 10.

Modelul 5

SUBIECTUL I.	30 p
1.	5 p
$\overline{z-2} = -i$	2 p
$i^3 = -i$	1 p
$\overline{z-2}^{2015} = i$	2 p
2.	5 p
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	2 p
Coordonatele vârfului parabolei $x_V = \frac{-b}{2a}$, $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$	2 p
$x_V = 1$, $y_V = 0$	1 p
3.	5 p
$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = \|x-1\|$	2 p
$x-1=-1$ sau $x-1=1$	1 p
Rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$	2 p
4.	5 p
Binomul lui Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$	2 p
Suma este $S = (1-1)^n = 0$	3 p
5.	5 p
$x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{3}{2}$, $y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = -\frac{1}{2}$	2 p
Vectorul $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\overrightarrow{i} + (y_M - y_A)\overrightarrow{j} = \frac{5}{2}\overrightarrow{i} - \frac{3}{2}\overrightarrow{j}$	2 p
Lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$ este $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$	1 p
6.	5 p
Se observă că $BC^2 = AB^2 + AC^2$	1 p
Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $m(\hat{A}) = 90°$	2 p
Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R = \frac{BC}{2} = 5$	2 p
SUBIECTUL II.	30 p
1.	15 p
a) Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem $(x+1)(y+1) - 1 = xy + x + y$	5 p
b) Elementul neutru este 0, $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$	2 p
Se observă că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$	1 p
Orice $x \neq -1$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = -\frac{x}{x+1}$	2 p
c) $\forall x \in \mathbf{R}$ avem că $f(x \circ (-1)) = f(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2 p
$\det f(-1) = -1$	2 p
$\forall x \in \mathbf{R}$ avem că matricea $f(x \circ (-1))$ este inversabilă	1 p
2.	15 p
a) $f(-1) = 0$ implică $x_1 = -1$ rădăcină reală	1 p
$f = (X+1) \cdot (X^2 - 2X + 2)$	1 p
$\Delta = b^2 - 4ac = -4$	1 p
$x_2 = 1 - i$, $x_3 = 1 + i$ rădăcini complexe	2 p

b) Relaţiile lui Vieète pentru $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, 3 p

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3} = 0, = -\frac{a_0}{a_3} = -2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1$ 2 p

c) Considerăm polinomul de gradul doi $g = aX^2 + bX + c$

$g(-1) = a - b + c = -1$, $g(1 - i) = -2ai + (1 - i)b + c = 1 + i$,

$g(1 - i) = 2ai + (1 + i)b + c = 1 - i$ 2 p

$a - b + c = -1$, $b + c = 1$, $2a + b = -1$ 2 p

$a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{2}{5}$ 1 p

SUBIECTUL III. 30 p

1. 15 p

a) $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$ 4 p

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ 1 p

b) $f_s^{'}(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \nearrow 0}(x + 1) = 1$ 2 p

$f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} = -1$ 2 p

$f_s^{'}(0) + f_d^{'}(0) = 0$ 1 p

c) Funcţia F este continuă pe $\mathbf{R}$ şi derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 2 p

$F'(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}$ 1 p

$F_s^{'}(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} F'(x) = 1$, $F_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} F'(x) = 1 \Rightarrow F$ este derivabilă în 0 1 p

$F^{'}(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ 1 p

2. 15 p

a) $\lim\limits_{x \pm \infty} f(x) = 1$ 1 p

$\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = -\infty$ 1 p

$y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$ 1 p

$x = -1$ este asimptotă verticală la stânga către $+\infty$ 1 p

$x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta către $-\infty$ 1 p

b) $I_n = \int\limits_1^n dx - 2 \cdot \int\limits_1^n \frac{1}{x+1}\, dx$ 2 p

$I_n = n - (1 - 2\ln 2) - 2\ln(n + 1)$ 3 p

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_n}{n} = 1 - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1-2\ln 2+2\ln(n+1)}{n}$ 2 p

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$ 2 p

Limita este egală cu 1 1 p

BAREM DE EVALUARE SI NOTARE

Se acordă din oficiu 10 puncte. Fiecare din cele trei subiecte este notat cu 30 de puncte. Punctajul total maxim este de 100 de puncte.
Nota lucrării se obţine prin împărţirea punctajului total la 10.

Modelul 6

SUBIECTUL I.	30 p
1.	5 p
$(z-1)^{10} = 2^{10} i^{10}$	2 p
$i^{10} = i^2 = -1$	2 p
$(z-1)^{10} = -1024$	1 p
2.	5 p
Relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 x_2 = 4$	2 p
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$	2 p
$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{17}{16}$	1 p
3.	5 p
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$	2 p
$\sqrt[3]{(x-1)^3} = x - 1$	2 p
$x_1 = 0$ soluţie unică	1 p
4.	5 p
Numărul tuturor posibilităţilor este A_{25}^4	2 p
$A_{25}^4 = \frac{25!}{21!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$	2 p
Există 303600 variante de premiere	1 p
5.	5 p
Panta dreptei d este $m_d = -2$	1 p
Panta dreptei g este $m_g = m_d = -2$	1 p
Ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A este $y - y_A = m_d(x - x_A)$	2 p
Ecuaţia dreptei d este $y = -2x + 3$	1 p
6.	5 p
Se observă că $BC^2 = AB^2 + AC^2$	1 p
Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $m(\hat{A}) = 90°$	2 p
$\sin A = 1$	2 p
SUBIECTUL II.	30 p
1.	15 p
a) Calculul $A^2 = \begin{pmatrix} 3a & 3a & 3a \\ 3a & 3a & 3a \\ 3a & 3a & 3a \end{pmatrix}$	5 p
b) $A^1 = 3^0 A$, $A^2 = 3^1 A$	2 p
$A^k = 3^{k-1}A$ implică $A^{k+1} = 3^k A$	2 p
Conform metodei inducţiei matematice rezultă concluzia	1 p
c) Scrierea sistemului liniar omogen $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$	2 p
Rangul matricii sistemului este 1	1 p
Soluţia generală este $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$	2 p

2. 15 p

a) $f(\widehat{0}) = \widehat{1},\ f(\widehat{1}) = \widehat{0},\ f(\widehat{2}) = \widehat{1}$ 3 p

$f(\widehat{0}) + f(\widehat{1}) + f(\widehat{2}) = \widehat{2}$ 2 p

b) $f(\widehat{0}) = \widehat{1} \neq \widehat{0},\ f(\widehat{1}) = \widehat{0},\ f(\widehat{2}) = \widehat{1} \neq \widehat{0}$ 2 p

Singura rădăcină a lui f în $\mathbf{Z}_3$ este $\widehat{1}$ 3 p

c) $f = (X^2 + \widehat{2}X) \cdot (X + \widehat{2}) + \widehat{2}X + \widehat{1}$ 3 p

Câtul şi restul împărţirii sunt $q = X + \widehat{2},\ r = \widehat{2}X + \widehat{1}$ 2 p

SUBIECTUL III. 30 p

1. 15 p

a) $f_n'(x) = \frac{(x^n)'e^x - x^n(e^x)'}{(e^x)^2}$ 2 p

$f_n'(x) = \frac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}$ 3 p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n-2} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ 2 p

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ 2 p

c) $\int\limits_0^1 f_3(x)\,dx = \int\limits_0^1 x^3(-e^{-x})'\,dx =$ 1 p

$= -e^{-1} + 3\int\limits_0^1 x^2(-e^{-x})'\,dx =$ 1 p

$= -e^{-1} - 3e^{-1} + 6\int\limits_0^1 x(-e^{-x})'\,dx =$ 1 p

$= -e^{-1} - 3e^{-1} - 6e^{-1} + 6\int\limits_0^1 (-e^{-x})'\,dx$ 1 p

$\int\limits_0^1 f_3(x)\,dx = -16e^{-1} + 6$ 1 p

2. 15 p

a) Funcţia modul este continuă pe $\mathbf{R}$ 1 p

Funcţia modul este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 1 p

Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$ 1 p

Funcţia f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ 2 p

b) Ecuaţia tangentei în $M(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 2 p

$x_0 = 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 2$ 1 p

Ecuaţia tangentei la G_f în $O(0,0)$ este $y = 2x$ 2 p

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 2x & \text{dacă} \quad x \in [-1, 1) \\ -2 & \text{dacă} \quad x \in [1, +\infty) \end{cases}$ 2 p

$\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx$ 2 p

$\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2$ 1 p

BAREM DE EVALUARE SI NOTARE

Se acordă din oficiu 10 **puncte. Fiecare din cele trei subiecte este notat cu** 30 **de puncte. Punctajul total maxim este de** 100 **de puncte.**
Nota lucrării se obţine prin împărţirea punctajului total la 10.

Modelul 7

SUBIECTUL I.	30 p
1.	5 p
$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = -i$	2 p
$\bar{z}^{2015} = i^{2015}$	1 p
$\bar{z}^{2015} = i^{2012} \cdot i^3 = -i$	2 p
2.	5 p
Relaţiile lui Vieète $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = m$	2 p
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - 2m$	1 p
$(-6)^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 - 4m$	1 p
$m = -8$	1 p
3.	5 p
Numerele cerute sunt 11, 13, 21, 23, 31, 33	4 p
Există 6 numere	1 p
4.	5 p
Condiţii de existenţă logaritmi: $x \neq \frac{1}{2}$, $x > 0$	2 p
$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$	1 p
Ecuaţia este echivalentă cu $\log_2 \sqrt{2x-1} = \log_2 \sqrt{x}$	1 p
$x = 1$ este soluţie unică	1 p
5.	5 p
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dacă şi numai dacă $3 = n + 1$ şi $m = 4$	3 p
$m = 4$, $n = 2$	2 p
6.	5 p
$ctga = \frac{\cos a}{\sin a}$	$2p$ p
$\frac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{\sin a - 2\sqrt{3}\cos a} = \frac{1+\sqrt{3}ctga}{1-2\sqrt{3}ctga}$	2 p
Valoarea expresiei este -2	1 p
SUBIECTUL II.	30 p
1.	15 p
a) Calculul $detA = 3\omega(\omega - 1)$	5 p
b) Calculul $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	5 p
c) $A^3 = A^2 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$	1 p
$A^4 = A^2 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3^2 \cdot I_3$	1 p
$A^5 = A^4 \cdot A = 3^2 \cdot A$ şi $A^6 = A^5 \cdot A = 3^2 \cdot A^2$	1 p
Dacă A^{2k} are toate elementele numere reale atunci şi A^{2k+2} are toate elementele numere reale	1 p
Conform metodei inducţiei matematice rezultă concluzia	1 p

2. 15 p

a) $f(1) = a - 3$ 5 p

b) Dacă $(X-1)^2$ divide pe f, atunci $X-1$ divide f 2 p

$X-1$ divide f dacă şi numai dacă $f(1) = 0$ 2 p

$X^2 - 2X + 1$ divide pe f pentru $a = 3$ 1 p

c) Pentru $a = 3$, $f = (X-1)^3$ 2 p

$f(2^x) = (2^x - 1)^3$ 1 p

Ecuaţia $(2^x - 1)^3 = 0$ are solutia triplă $x = 0$ 2 p

SUBIECTUL III. 30 p

1. 15 p

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{x+1+\frac{1}{x}}$ 2 p

Limita este 0 3 p

b) $f'(x) = \frac{x^2+x+1-(x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ 2 p

$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$ 3 p

c) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}}\,dx =$ 2 p

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 + \sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1$ 2 p

Integrala este egala cu $\ln\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ 1 p

2. 15 p

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx =$ 3 p

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ 2 p

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,dx =$ 3 p

$= \ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ 2 p

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$ 2 p

Întrucât $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$ 2 p

Limita cerută este egală cu 0 1 p

BAREM DE EVALUARE SI NOTARE

Se acordă din oficiu 10 puncte. Fiecare din cele trei subiecte este notat cu 30 de puncte. Punctajul total maxim este de 100 de puncte.
Nota lucrării se obţine prin împărţirea punctajului total la 10.

Modelul 8

SUBIECTUL I.	30 p
1.	5 p
$z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = i$	2 p
$z^{2015} = i^{2015} = i^{2012} \cdot i^3 = -i$	1 p
$\bar{z}^{2015} = (-i) = i$	1 p
$z^{2015} + \bar{z}^{2015} = 0$	1 p
2.	5 p
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, $x_1x_2x_3 = -17$	3 p
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$	1 p
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	1 p
3.	5 p
Substituţia $2^x = t$	1 p
Obţinerea ecuaţiei $t^2 - 2t - 8 = 0$	1 p
Obţinerea rădăcinilor $t_1 = -2$, $t_2 = 4$	1 p
$x = 2$ soluţie unică	2 p
4.	5 p
Binomul lui Newton $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$	2 p
Suma este egală cu $(1 + 2)^n = 3^n$	3 p
5.	5 p
Panta dreptei d este $m_d = -1$	1 p
Panta dreptei g este $m_g = -\frac{1}{m_d} = -1$	1 p
Ecuaţia dreptei g este $y - y_A = m_g(x - x_A)$	1 p
După calcule, ecuaţia dreptei g este $y = -x$	2 p
6.	5 p
$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, unde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$	3 p
$\cos A = \frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{15}$	2 p
SUBIECTUL II.	30 p
1.	15 p
a) Calculul $\det A = (a - 1)(b - 1)(b - a)$	5 p
b) $\det A = 2$	1 p
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, A^* fiind adjuncta matricii A	1 p
$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	2 p
Inversa matricii este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	1 p
c) Sistemul liniar omogen este $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$	1 p

Rangul matricii sistemului este egal cu 2 1 p

Soluţia generală este $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 3 p

2. 15 p

a) $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$ 5 p

b) $f(\widehat{0}) = \widehat{1}$, $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$, $f(\widehat{2}) = \widehat{2}$, $f(\widehat{3}) = \widehat{1}$, $f(\widehat{4}) = \widehat{0}$ 3 p

Rădăcinile lui f din $\mathbf{Z}_5$ sunt $x_1 = \widehat{1}$, $x_2 = \widehat{4}$ 2 p

c) $X - \widehat{1}$ divide pe f, $X - \widehat{4}$ divide pe f 2 p

$(X - \widehat{1}) \cdot (X + \widehat{1}) = X^2 - \widehat{1}$ divide pe f 1 p

$f = (X^2 - \widehat{1}) \cdot (X^2 + \widehat{2})$ 1 p

Descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbf{Z}_5[X]$

$f = (X - \widehat{1}) \cdot (X - \widehat{4}) \cdot (X^2 - \widehat{3})$ 1 p

SUBIECTUL III. 30 p

1. 15 p

a) Condiţia de existenţă a radicalului $x^2 - 1 > 0$ 2 p

$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 3 p

b) $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = 0$ 1 p

$x = -1$ este asimptotă verticală la stânga către $-\infty$ 1 p

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ 1 p

$y = -1$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ 1 p

$y = 1$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ 1 p

c) $\int\limits_{n+1}^{n+2} f(x) \cdot \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int\limits_{n+1}^{n+2} (x - 1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{n+1}^{n+2} =$ 2 p

Limita este egală cu $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) = +\infty$ 3 p

2. 15 p

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dacă} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}$ 1 p

$\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = 2$ 2 p

$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2$ 2 p

b) f este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 2 p

f este continuă în 0 pentru că $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$ 1 p

f nu este derivabilă în 0 pentru că $f_s'(0) = 2$, $f_d'(0) = -2$ 2 p

c) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{0} (x^2 + 2x)\, dx + \int\limits_{0}^{1} (x^2 - 2x)\, dx =$ 2 p

$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{0}^{1}$ 2 p

Valoarea integralei $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx$ este $-\frac{4}{3}$ 1 p